

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

III. rész (30 perc). Adja meg a következő tétel bizonyítását! A teljes bizonyítás leírása összesen 6 pontot ér. A választ a túloldalon is folytathatja.

31. Egy A lineáris transzformáció minden sajátértéke gyöke a minimálpolinomjának.

Legyen λ az A lineáris transzformáció egy sajátértéke. Ez azt jelenti, hogy van olyan $v \neq 0$ vektor, amelyre $A(v) = \lambda v$. Legyen A minimálpolinomja $m_A(x) = x^k + c_{k-1}x^{k-1} + \dots + c_1x + c_0$. Ez azt jelenti, hogy $m_A(A) = 0$ és $m_A(x)$ a legkisebb fokú polinom, amire ez teljesül. Részletesen kiírva $A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \dots + c_1A + c_0I = 0$ [ahol I a vektortér identikus transzformációja, 0 pedig az a lineáris transzformáció, ami minden vektort a nullvektorra képez]. Teljes indukcióval belátható, hogy $A^n(v) = \lambda^n v$ [$A^{n+1}(v) = A(A^n(v)) = A(\lambda^n v) = \lambda^n A(v) = \lambda^n(\lambda v) = \lambda^{n+1}v$]. Tehát $0 = m_A(A)(v) = (A^k + c_{k-1}A^{k-1} + \dots + c_1A + c_0I)(v) = A^k(v) + c_{k-1}A^{k-1}(v) + \dots + c_1A(v) + c_0I(v) = \lambda^k v + c_{k-1}\lambda^{k-1}v + \dots + c_1\lambda v + c_0v = (\lambda^k + c_{k-1}\lambda^{k-1} + \dots + c_1\lambda + c_0)v = m_A(\lambda)v$. Mivel $v \neq 0$, ezért $m_A(\lambda) = 0$, amit bizonyítani kellett.

OSZTÁLYZATOK: Elégtelent az kap, akinek az első vizsgarészből nincs 7 pontja, vagy a második vizsgarészből nincs 8 pontja, vagy akinek a három rész S összpontszáma kisebb, mint 17. A többiek osztályzata:

	Osztályzat
$17 \leq S < 21$	2
$21 \leq S < 24$	3
$24 \leq S < 27$	4
$27 \leq S \leq 36$	5