

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben a skalárral szorzást úgy, hogy $t \cdot (x, y) = (2tx, 2ty)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és egy helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$1 \cdot v = v$ nem teljesül, pl. $1 \cdot (1, 0) = (2, 0)$ a módosított szorzási szabály szerint.

12. Adjunk meg olyan u, v, w vektorokat, hogy $\{u, u + v\}$ és $\{u, u + w\}$ független legyen, de $\{u, v + w\}$ ne legyen az.

Például $u = (1, 0)$,
 $v = (0, 1), w = (0, -1)$

13. Hány dimenziós alteret alkotnak az n -szer n -es felső háromszög-mátrixok?

$\frac{n(n+1)}{2}$

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely egy $(x, y, z)^T \in \mathbb{R}^3$ vektorhoz az $(x - y, y - z, z - x)^T$ vektort rendeli hozzá?

2

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy két lineáris leképezés szorzata is megtartja a skalárral való szorzást, azaz $(AB)(tv) = t((AB)(v))$, ahol $A, B \in \text{Hom}(V, V)$, $t \in T$ (a test eleme), $v \in V$ egy vektor. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, D, S, V betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) A skalárszorostartó.

(B) B skalárszorostartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(S) Leképezések szorzatának definíciója.

(V) Vektortéraxióma.

(Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(AB)(tv) = \boxed{S}$$

$$A(B(tv)) = \boxed{B}$$

$$A(tB(v)) = \boxed{A}$$

$$t(A(B(v))) = \boxed{S}$$

$$t((AB)(v))$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nul-lapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A \in \text{Hom}(V, V)$, melyre $A(p(x)) = (x-1)p'(x)$ ($p'(x)$ a deriváltat jelöli). Mi A mátrixa az $1, x, x^2$ bázisban?

$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

18. Írja fel $\mathbb{C}^3$ olyan lineáris transzformációjának a Jordan-féle normálalakját, amelynek minimálpolinomja x^3 .
19. Az $\mathbb{R}^4$ egy A lineáris transzformációjának minimálpolinomja $x^2 + x + 1$. Mi lehet a karakterisztikus polinomja?
20. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u + 2iv, u + 2iv \rangle$?
21. Egészítse ki a következő 2-szer 2-es mátrixot úgy, hogy ortogonális mátrixot kapjon. (Elég egy lehetséges megoldást adni.)
22. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$ -ben az $(i, 0, 1)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
23. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Egy indefinit kvadratikussal alak bármely bázisban vett szimmetrikus mátrixában a főátlóban van pozitív és negatív szám is.”
24. Mutasson példát olyan a és b permutációkra, hogy a rendje 2, b rendje 2, ab rendje 3 legyen.
25. Hány elemű részcsoportok lehetnek egy 55-elemű csoportban? (A triviális eseteket is sorolja fel.)
26. Mi a rendje a következő permutációnak? $(1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)(7\ 8\ 9\ 10)$
27. Mutasson ellenpéldát a következő állításra: „Az invertálható szimmetrikus mátrixok csoportot alkotnak a mátrixszorzás műveletére nézve.”
28. Számítsa ki a $(2i + j)(3i + k)$ kvaterniót.
29. Mely c értékre van benne az $x^4 + cx^2 + 1$ polinom az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrű $x^2 + 1$ által generált főideáljában?
30. Legyen a algebrai szám, t transzcendens szám. Mely esetben lesz at algebrai szám?

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(x^2 + x + 1)^2$$

$$5$$

$$\begin{bmatrix} 0,6 & 0,8 \\ 0,8 & -0,6 \end{bmatrix}$$

$$\text{Pl. } (i, 0, -1), (0, 1, 0)$$

$$\text{Pl. } \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$a = (1\ 2), b = (2\ 3), \\ ab = (1\ 2\ 3)$$

$$1, 5, 11, 55$$

$$12$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$-6 + i - 2j - 3k$$

$$c = 2$$

$$\text{Ha } a = 0.$$