

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Az összeadás változatlanul hagyása mellett módosítsuk $\mathbb{R}^2$ vektorainak skalárral való szorzását így: legyen $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha^2 y)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$$(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v, \text{ pl. nem teljesül, ha } \alpha = \beta = 1, v = (0, 1)$$

12. Vegyük $\mathbb{R}^2$ három részhalmazát: $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$. Ezek közül melyik altér, illetve melyek alterek $\mathbb{R}^2$ -ben?

A és C

13. Legyenek v_1, v_2, v_3 lineárisan független vektorok $\mathbb{R}^3$ -ben. Mely $t \in \mathbb{R}$ érték esetén lesznek a $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + tv_3$ vektorok lineárisan összefüggők?

 $t = -1$ esetén.

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixhoz az $M^\top - M$ mátrixot rendeli?

1

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy két $A, B \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció szorzata is összegtartó, azaz $AB(u + v) = AB(u) + AB(v)$ tetszőleges $u, v \in V$ vektorok esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, C, O, S betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) A összegtartó.(B) B összegtartó.

(C) Asszociativitás.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(S) Leképezések szorzatának definíciója.

(Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(AB)(u + v) =$$

S

$$A(B(u + v)) =$$

B

$$A(B(u) + B(v)) =$$

A

$$A(B(u)) + A(B(v)) =$$

S

$$(AB)(u) + (AB)(v)$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nul-lapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \rightarrow \mathbb{C}$, melyre $A(p) = p(1 - i)$. Mi A mátrixa a szokásos bázispárban?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

[bázisok: $1, x, x^2$, ill. $1, i$]

18. Az $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrix minimálpolinomja $x^2 - 2x + 1$. Mi lehet M Jordan-féle normálalakja (hasonlóság erejéig)?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

19. Egy 4-dimenziós valós vektortér A lineáris transzformációjának minimálpolinomja $x^3 - 1$. Mi lehet A karakterisztikus polinomja?

$$(x^3 - 1)(x - 1) = x^4 - x^3 - x + 1$$

20. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u + iv, iu + v \rangle$?

$$0$$

21. Mennyi egy ortogonális mátrix négyzetének a determinánsa?

$$1$$

22. Adja meg $\mathbb{C}^3$ -ben az $(i, 1, 1)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.

$$\text{Pl. } (1, i, 0), (0, 1, -1).$$

23. Adjon ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixának minden eleme pozitív szám, akkor a kvadratikus alak pozitív definit.”

$$\text{Pl. } x^2 + 2xy + y^2, \text{ azaz } \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

24. Legyenek a és b egy csoport elemei. Mi annak a feltétele, hogy $(ab)^2 = a^2b^2$ teljesüljön?

$$ab = ba$$

25. Hány részcsoportja van a 100-elemű ciklikus csoportnak?

$$9$$

26. Hány másodrendű elem van az S_4 szimmetrikus csoportban?

$$9$$

27. A négyzet D_4 szimmetriacsoportját generálja az f 90°-os forgatás és egy t tengelyes tükrözés. Adjon meg egy 4-elemű normálosztót D_4 -ben, ami tartalmazza t -t.

$$\{e, t, f^2t, f^2\}$$

28. Számítsa ki a $(10 + 5j)(1 + 2i)^{-1}$ kvaterniót.

$$2 - 4i + j + 2k$$

29. Mi $\mathbb{Q}[x]$ -nek az a legszűkebb ideálja, amelyik az $x^2 - 3x + 2$ és az $x^2 - 4$ polinomokat egyaránt tartalmazza?

$$\text{Az } (x - 2) \text{ főideál.}$$

30. Mutasson olyan algebrai számot, amelynek a minimálpolinomja harmadfokú.

$$\text{Pl. } \sqrt[3]{2}.$$