

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Az összeadás változatlanul hagyása mellett módosítsuk $\mathbb{R}^2$ vektorainak skalárral való szorzását így: legyen $a(x, y) = (a^2x, a^2y)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

$(a + b)v = av + bv$, pl. nem teljesül, ha $a = b = 1$, $v = (1, 0)$.

12. Mely d számokra igaz, hogy a d determinánsú valós mátrixok alteret alkotnak a 2×2 -es valós mátrixok vektorterében?

Nincs ilyen d .

13. Adjon meg olyan u, v, w vektorokat, hogy $\{u, v\}$ és $\{v, w\}$ lineárisan független legyen, ugyanakkor $\{u, v + w\}$ lineárisan összefüggő.

Pl. $u = (1, 0)$,
 $v = (0, 1)$, $w = (1, -1)$

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixhoz $M + M^\top$ -t rendeli?

3

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy két $A, B \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés összege is skalárszorostartó, azaz $(A + B)(cu) = c((A + B)(u))$ minden $c \in T$ testelem és $u \in U$ vektor esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, D, O, V betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A és B összegtartó.

(L) A és B skalárszorostartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(V) Vektortéraxióma.

(Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$(A + B)(cu) = \boxed{\text{O}}$$

$$A(cu) + B(cu) = \boxed{\text{L}}$$

$$cA(u) + cB(u) = \boxed{\text{V}}$$

$$c(A(u) + B(u)) = \boxed{\text{O}}$$

$$c((A + B)(u))$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nulapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \rightarrow V$, melyre $A(p) = 2p + p'$ (p' a polinom deriváltját jelöli). Írja föl A mátrixát a szokásos bázisban.
18. Az $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrix karakterisztikus polinomja $x^3 + 2x^2 + x$. Mi lehet M Jordan-féle normálalakja (hasonlóság erejéig)?
19. Egy valós vektortér A lineáris transzformációjának karakterisztikus polinomja $x^4 - x^2$. Mi lehet A minimálpolinomja?
20. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u + iv, 2u + v \rangle$?
21. Egy ortogonális mátrix karakterisztikus polinomja $x^2 - cx + 1$. Mik c lehetséges értékei?
22. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$ -ben az $(1, i, 1 + i)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
23. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratus alak szimmetrikus mátrixában a főátlóban csak pozitív számok állnak, akkor a kvadratus alak pozitív definit.”
24. Legyen $a = (1 \ 2) \in S_3$. Mely $b \in S_3$ elemekre teljesül, hogy $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$?
25. Hány részcsoportja van a **6-elemű** diédercsoportnak?
26. Hány ötödrendű elem van az S_5 szimmetrikus csoportban?
27. Indokolja meg egy példa segítségével, hogy a $GL(2, \mathbb{R})$ általános lineáris csoportban a csoporthoz tartozó diagonális mátrixok nem alkotnak normálosztót.
28. Számítsa ki a $(1 + i)^{-1}(4 + 2j)$ kvaterniót.
29. Mi $\mathbb{R}[x]$ -nek az a legszűkebb ideálja, amelyik az $x^2 - 1$ és az $x^3 - 1$ polinomokat egyaránt tartalmazza?
30. Mutasson két olyan transzcendens számot, melyeknek az összege algebrai szám.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x^4 - x^2 \text{ vagy } x^3 - x$$

$$2 - i$$

$$-2 \leq c \leq 2.$$

$$\text{Pl. } (1, -i, 0), (2, 0, -1-i).$$

$$\text{Pl. } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b \in \{e, (1 \ 2)\}$$

$$6$$

$$4! = 24$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$2 - 2i + j - k$$

$$\text{Az } (x - 1) \text{ főideál.}$$

$$\text{Pl. } (-\pi) + \pi = 0.$$