

NÉV: _____ NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Módosítsuk a síkon, mint $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben az összeadást úgy, hogy bármely két vektor összege az origó, azaz $(0,0)$ legyen. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

12. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „A $\mathbb{C}$ fölötti $\mathbb{C}^{2 \times 2}$ vektortér valós determinánsú mátrixai alteret alkotnak.”

13. Adjuk meg az u, v, w vektorokat úgy, hogy $\{u, v\}$ és $\{v, w\}$ független legyen, de $\{v, w\}$ ne legyen az.

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely minden egyes $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixhoz az $M \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ mátrixot rendeli hozzá?

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy $\text{Hom}(V, W)$ -ben a skalárral való szorzásra teljesül, hogy $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ minden $\lambda, \mu \in T$ testelem és A lineáris leképezés esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az S, L, D, O, V betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(S) A összegtartó.

(L) A skalárszorostartó.

(D) Leképezés skalárszorosának definíciója.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(V) Vektortéraxióma.

(Pontozás: 4 helyes válasz: 2 pont;
2 v. 3 helyes válasz: 1 pont;
egyébként: 0 pont.)

$$((\lambda + \mu)A)(v) = \square$$

$$(\lambda + \mu)(A(v)) = \square$$

$$\lambda(A(v)) + \mu(A(v)) = \square$$

$$(\lambda A)(v) + (\mu A)(v) = \square$$

$$(\lambda A + \mu A)(v)$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nulapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A \in \text{Hom}(V, V)$, melyre $A(p(x)) = p(x+1)$. Mi A mátrixa az $1, x, x^2$ bázisban?
18. Az $M \in \mathbb{C}^{2 \times 2}$ mátrix sajátértékei $\pm i$. Mi lehet M^2 ?
19. Egy 6-dimenziós valós vektortér A lineáris transzformációjának minimálpolinomja $x^4 - x^2$. Mi lesz A^2 minimálpolinomja?
20. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u - iv, u + 2iv \rangle$?
21. Egy önadjungált mátrix karakterisztikus polinomja $x^k - 1$. Mik k lehetséges értékei?
22. Adjuk meg $\mathbb{C}^3$ -ben az (i, i, i) vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
23. Adjunk ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixában a főátlóban van nulla, akkor a kvadratikus alak szemidefinit.”
24. Legyenek a és b egy csoport elemei, a rendje 2, b rendje 5. Mi egy elégséges feltétele annak, hogy ab rendje 10 legyen?
25. Hány részcsoportja van a 12-elemű ciklikus csoportnak?
26. Hány másodrendű elem van a szabályos 8-szög szimmetriacsoportjában?
27. Mely d valós szám esetén alkotnak részcsoportot a d determinánsú mátrixok a $\text{GL}(n, \mathbb{R})$ általános lineáris csoportban?
28. Számítsa ki a $(4 + 2j)(1 + i)^{-1}$ kvaterniót.
29. Mely c értékre van benne az $x^4 + c$ polinom az $\mathbb{R}[x]$ polinomgyűrű $x^2 - 1$ által generált főideáljában?
30. Hány olyan algebrai szám van, amelynek a minimálpolinomja $x^2 - 3x + 3$?