

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

II. rész (60 perc). Minden válaszáért 0 vagy 1 pont jár (negatív pontszám nincs). Indokolni nem kell. Aki elér legalább 10 pontot (és az I. részből is legalább hetet), annak a dolgozata már legalább elégséges; aki viszont nem éri el a 8 pontot, azé biztosan elégtelen (ez utóbbi esetben a harmadik részt ki sem javítjuk). A többi esetben a vizsga eredményessége a másik két részre kapott pontszámtól függ, a részletek és a ponthatárok a harmadik rész feladatlapján találhatók.

11. Az összeadás változatlanul hagyása mellett módosítsuk $\mathbb{R}^2$ vektorainak skalárral való szorzását így: legyen $\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha^2 y)$. Adjunk meg egy vektortéraxiómát, ami nem teljesül, és a helyettesítést is, ami ezt mutatja.

12. Vegyük $\mathbb{R}^2$ három részhalmazát: $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 0\}$, $B = \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 0\}$, $C = \{(x, y) \mid x^2 + 2xy + y^2 = 0\}$. Ezek közül melyik altér, illetve melyek alterek $\mathbb{R}^2$ -ben?

13. Legyenek v_1, v_2, v_3 lineárisan független vektorok $\mathbb{R}^3$ -ben. Mely $t \in \mathbb{R}$ érték esetén lesznek a $v_1 + v_2, v_2 + v_3, v_1 + tv_3$ vektorok lineárisan összefüggők?

14. Mennyi a rangja annak a lineáris transzformációnak, amely az $M \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mátrixhoz az $M^\top - M$ mátrixot rendeli?

- 15–16. A következő levezetésben azt mutatjuk meg, hogy két $A, B \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció szorzata is összegtartó, azaz $AB(u + v) = AB(u) + AB(v)$ tetszőleges $u, v \in V$ vektorok esetén. Minden egyes egyenlőségjelhez írjuk a mellette levő keretbe az A, B, C, O, S betűk egyikét aszerint, hogy annak a lépésnek mi az indoklása. A betűk jelentése:

(A) A összegtartó.(B) B összegtartó.

(C) Asszociativitás.

(O) Leképezések összegének definíciója.

(S) Leképezések szorzatának definíciója.

(Pontozás:	4 helyes válasz:	2 pont;
	2 v. 3 helyes válasz:	1 pont;
	egyébként:	0 pont.

$$(AB)(u + v) =$$

$$A(B(u + v)) =$$

$$A(B(u) + B(v)) =$$

$$A(B(u)) + A(B(v)) =$$

$$(AB)(u) + (AB)(v)$$

17. Legyen V az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből és a nul-lapolinomból álló altér $\mathbb{R}$ fölött, és $A : V \rightarrow \mathbb{C}$, melyre $A(p) = p(1 - i)$. Mi A mátrixa a szokásos bázispárban?

18. Az $M \in \mathbb{C}^{3 \times 3}$ mátrix minimálpolinomja $x^2 - 2x + 1$. Mi lehet M Jordan-féle normálalakja (hasonlóság erejéig)?
19. Egy 4-dimenziós **valós** vektortér A lineáris transzformációjának minimálpolinomja $x^3 - 1$. Mi lehet A karakterisztikus polinomja?
20. Legyenek u és v merőleges egységvektorok $\mathbb{C}$ fölött. Mennyi lesz $\langle u + iv, iu + v \rangle$?
21. Mennyi egy ortogonális mátrix négyzetének a determinánsa?
22. Adja meg $\mathbb{C}^3$ -ben az $(i, 1, 1)$ vektor által generált altér ortogonális kiegészítő alterének egy bázisát.
23. Adjon ellenpéldát az alábbi állításra: „Ha egy kvadratikus alak szimmetrikus mátrixának minden eleme pozitív szám, akkor a kvadratikus alak pozitív definit.”
24. Legyenek a és b egy csoport elemei. Mi annak a feltétele, hogy $(ab)^2 = a^2b^2$ teljesüljön?
25. Hány részcsoportja van a 100-elemű ciklikus csoportnak?
26. Hány másodrendű elem van az S_4 szimmetrikus csoportban?
27. A négyzet D_4 szimmetriacsoportját generálja az f 90° -os forgatás és egy t tengelyes tükrözés. Adjon meg egy 4-elemű normálosztót D_4 -ben, ami tartalmazza t -t.
28. Számítsa ki a $(10 + 5j)(1 + 2i)^{-1}$ kvaterniót.
29. Mi $\mathbb{Q}[x]$ -nek az a legszűkebb ideálja, amelyik az $x^2 - 3x + 2$ és az $x^2 - 4$ polinomokat egyaránt tartalmazza?
30. Mutasson olyan algebrai számot, amelynek a minimálpolinomja harmadfokú.

Pl.