

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Mikor mondjuk azt, hogy a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok lineárisan függetlenek?

Ha csak a triviális lineáris kombinációjuk adja meg a nullvektort, azaz ha $t_1 v_1 + t_2 v_2 + \dots + t_n v_n = 0$, akkor $t_1 = t_2 = \dots = t_n = 0$.

2. Mit jelent az, hogy a V vektortérbeli U altér direkt kiegészítője a W altér?

Minden V -beli vektor egyértelműen áll elő $u + w$ összegként, ahol $u \in U$, $w \in W$.
VAGY: $U + W = V$ és $U \cap W = \{0\}$.

3. Tegyük fel, hogy az $A \in \text{Hom}(V, W)$ és $B \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésekre $AB = 0$ teljesül. Ekkor milyen kapcsolat áll fenn $\text{Ker}(A)$ és $\text{Im}(B)$ között?

$$\text{Ker}(A) \supseteq \text{Im}(B)$$

4. Mit jelent az, hogy egy v vektor az $A \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció sajátvektora? (Figyeljen a részletekre!)

$$A(v) = tv \text{ valamilyen } t \text{ skalárral és } v \neq 0.$$

5. Egy komplex számtest fölötti vektortér A lineáris transzformációjának **minimálpolinomja segítségével** fogalmazza meg, hogy mikor létezik olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

A akkor és csak akkor diagonalizálható, ha a minimálpolinomjának nincs többszörös gyöke.

6. Hogyan változik egy bilineáris függvény mátrixa, amikor egy új bázisra térünk át az S áttérési mátrix segítségével?

Az új bázisban a mátrix $S^T B S$ lesz, ha a régi bázisban B volt.

7. Milyen számok lehetnek egy önadjungált lineáris transzformáció sajátértékei?

Valós számok.

8. A konjugálás segítségével adja meg annak feltételét, hogy egy H részcsoport normálosztó legyen a G csoportban.

$$\forall g \in G, \forall h \in H : g^{-1} h g \in H$$

9. Hogyan számítjuk ki egy nem-nulla kvaternió inverzét?

$$(a + bi + cj + dk)^{-1} = \frac{a - bi - cj - dk}{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$$

10. Mik a T test fölötti összes n -szer n -es mátrixból álló $M_n(T)$ mátrixgyűrű ideáljai?

Csak a $\{0\}$ és az egész $M_n(T)$ gyűrű. (Azaz ez egy egyszerű gyűrű.)