

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Írjon fel olyan vektortér-axiómát, amelyben az egyenlőség egyik oldalán szerepel testelemmel való szorzás, a másik oldalán viszont nem.

$\forall v \in V : 1 \cdot v = v$, ahol 1 a test egységeleme.

2. Mit nevezünk egy vektortér bázisának?

Egy olyan vektorrendszert, ami egyszerre lineárisan független és generátorrendszer.
VAGY: Olyan vektorrendszert, amelynek lineáris kombinációiként minden vektor **egyértelműen** kifejezhető.

3. Hogyan fejezhető ki két véges dimenziós altér összegének a dimenziója?

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

4. Az $A \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés magterének felhasználásával adjuk meg annak feltételét, hogy két $u_1, u_2 \in U$ vektorra $A(u_1) = A(u_2)$ teljesüljön.

$$A(u_1) = A(u_2) \Leftrightarrow u_1 - u_2 \in \text{Ker}(A)$$

5. Milyen kapcsolat van egy lineáris transzformáció minimálpolinomja és karakterisztikus polinomja között?

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.

6. Mit nevezünk ortogonális transzformációnak?

Egy valós euklideszi tér olyan transzformációját, amelynek az inverze megegyezik az adjungáltjával, $A^{-1} = A^*$. VAGY: $\forall u, v \in V : \langle A(u), A(v) \rangle = \langle u, v \rangle$

7. Mondja ki a normális lineáris transzformációk diagonalizálhatóságáról szóló tételt.

Egy komplex euklideszi tér egy lineáris transzformációjához akkor és csak akkor található olyan **ortonormált** bázis, amelyben a mátrixa diagonális, ha a transzformáció normális, azaz $AA^* = A^*A$.

8. Hogyan kapjuk meg egy diszjunkt ciklusokra bontott permutáció rendjét?

A permutáció rendje a ciklusok hosszának legkisebb közös többszöröse.

9. Legyen I az R gyűrű ideálja. Mik az R/I faktorgyűrű elemei?

Az $r + I = \{r + x \mid x \in I\}$ maradékosztályok ($r \in R$).

10. Legyen a algebrai szám, t transzcendens szám. Az $a + t$ szám algebrai vagy transzcendens?

Transzcendens.