

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Mikor mondjuk, hogy a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok lineárisan összefüggők?

Ha vannak olyan $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n \in T$ skalárok, amelyek között van 0-tól különböző, amelyekkel $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n = 0$.

2. Legyen V egy véges dimenzós vektortér. Az $A \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció magterének segítségével adja meg annak feltételét, hogy A invertálható legyen.

$\text{Ker}(A) = \{0\}$.

3. Definiálja a sajátérték fogalmát.

A $\lambda \in T$ testelem az $A \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció sajátértéke, ha $\exists v \in V : v \neq 0, A(v) = \lambda v$.

4. Mit állít a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenség?

Euklideszi tér bármely u, v vektorpárjára $|\langle u, v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|$.

5. Mit nevezünk unitér transzformációnak?

Egy komplex euklideszi tér $A \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformációja unitér, ha $\forall u, v \in V : \langle A(u), A(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

6. Mi annak a feltétele, hogy egy véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjához legyen olyan bázis, amelyben a transzformáció mátrixa diagonális?

Egy T test fölötti véges dimenziós vektortér lineáris transzformációjához pontosan akkor létezik olyan bázis, amelyben a mátrixa diagonális, ha a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik $T[x]$ -ben.

7. Mondja ki a részcsoporthoz elemszámára vonatkozó Lagrange-tételt.

Egy véges csoport bármely részcsoporthoz elemszáma osztója a csoport elemszámának (másnéven rendjének).

8. Mondja ki a csoportok közötti homomorfizmusokra vonatkozó homomorfizmus-tételt.

Legyen $\varphi : G \rightarrow H$ homomorfizmus. Ekkor $G / \text{Ker}(\varphi) \cong \text{Im}(\varphi)$.

9. Mit nevezünk egy gyűrű ideáljának?

Az R gyűrű egy I részhalmaza ideál, ha az összeadásra nézve részcsoporthoz (azaz nem üres, $\forall x, y \in I : x + y, -x \in I$) és $\forall r \in R \forall x \in I : rx, xr \in I$.

10. Definiálja a transzcendens szám fogalmát.

Egy c komplex számot transzcendensnek nevezünk, ha nincs olyan nem-nulla, racionális együtthatós polinom, aminek gyöke.