

NÉV: _____

NEPTUN AZONOSÍTÓ: _____

I. rész (30 perc). Minden teljesen precíz és korrekt válaszáért 1 pont jár, a többiért 0. Indokolni nem kell. Aki itt nem ér el legalább 7 pontot, annak a dolgozata elégtelen, és ekkor a második és harmadik részt ki sem javítjuk.

1. Írjon fel olyan vektortér-axiómát, amiben kétféle összeadás szerepel.

$$\forall a, b \in T, \forall v \in V : (a + b)v = av + bv$$

2. Mik a $v_1, v_2, \dots, v_n$ vektorok által generált altér elemei?

$$\langle v_1, v_2, \dots, v_n \rangle = \{c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n \mid c_1, c_2, \dots, c_n \in T\}$$

3. Mi annak a feltétele, hogy két altér összege, $U_1 + U_2$ direkt összeg legyen?

$$U_1 \cap U_2 = \{0\}$$

4. Írja fel az $A \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezés magterének és képterének dimenziója közötti összefüggést.

$$\dim \text{Ker}(A) + \dim \text{Im}(A) = \dim U$$

5. Definiálja az invariáns altér fogalmát.

Az $U \subseteq V$ altér az $A \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformáció invariáns altere, ha $\forall u \in U : A(u) \in U$.

6. Mit nevezünk ortogonális transzformációnak?

Egy valós euklideszi tér $A \in \text{Hom}(V, V)$ lineáris transzformációja ortogonális, ha $\forall u, v \in V : \langle A(u), A(v) \rangle = \langle u, v \rangle$.

7. Mondja ki a normális lineáris transzformációk diagonalizálhatóságáról szóló tételt.

Egy lineáris transzformációhoz pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis, amelyben a mátrixa diagonális, ha normális transzformáció.

8. Mondja ki a permutációcsoportok pályái (orbitjai) számának kiszámítására vonatkozó tételt.

Egy permutációcsoport pályáinak száma megegyezik a csoportelemek fixpontjai számának átlagával.

9. Legyen I az R gyűrű ideálja. Mik az R/I faktorgyűrű elemei?

Az $r + I$ mellékosztályok ($r \in R$).

10. Definiálja az algebrai szám fogalmát.

Egy komplex számot algebrainak nevezünk, ha van olyan nem-nulla, racionális együtthatós polinom, aminek gyöke.