SZINGULÁRIS FELBONTÁS ÉS PSZEUDOINVERZ

Az alábbiakban kimondjuk és bebizonyítjuk a mátrixokra vonatkozó szinguláris (érték) felbontás tételét, majd bevezetjük a Moore–Penrose-féle pszeudoinverz fogalmát. Folytatva az Algebra2 lineáris algebra tantárgy szellemét, melynek tananyaga megtalálható a

`ewkiss.web.elte.hu/wp/wordpress/oktatas/faliujsag/eloadas-algebra2-normal-2018-tavasz`

címről letölthető előadásjegyzetekben, a lineáris leképezések nyelvét használjuk mátrixokkal való számolások helyett, ahol csak lehetséges.

A szinguláris felbontási tétel azt mondja ki, hogy ha adott két euklideszi tér között egy lineáris leképezés, akkor alkalmas ortonormált bázispárban ennek mátrixa diagonális, és a diagonálisban nemnegatív valós számok állnak (komplex fölött is), a mátrix *szinguláris értékei.* Az egységgömb képe egy ellipszoid, és a nem nulla szinguláris értékek a féltengelyek hosszát adják meg. Mindez lehetővé teszi egy mátrix olyan „invertálását”, amelynek segítségével optimalizálhatjuk lineáris egyenletrendszerek megoldását.

1. AB és BA sajátértékei

Legyenek V és W azonos T test feletti végesdimenziós vektorterek, $A \in \operatorname{Hom}(V, W)$ és $B \in \operatorname{Hom}(W, V)$. Ekkor AB a W-nek, BA pedig a V-nek lesz lineáris transzformációja, és ezért mindkettőnek beszélhetünk a sajátértékeiről.

1.1. Állítás. *Tegyük föl, hogy A és B is invertálható. Ekkor AB és BA karakterisztikus polinomja megegyezik, és így sajátértékeiknek algebrai multiplicitása is ugyanaz.*

Bizonyítás. A dimenziótételből következik, hogy $\dim V = \dim W$. Rögzítsünk egy bázispárt, és legyen M, illetve N az A, illetve a B mátrixa; ezek négyzetes, invertálható mátrixok. Ekkor $k_{AB}(x) = \det(MN - xE)$ és $k_{BA}(x) = \det(NM - xE)$. A determinánsok szorzástétele miatt $\det(MN - xI) = \det\big(M^{-1}(MN - xI)M\big) = \det(NM - xI)$. □

A szakasz hátralévő részében azt látjuk be, hogy az általános, nem invertálható esetben is ugyanilyen jól viselkednek AB és BA nem nulla sajátértékei.

1.2. Tétel. *AB és BA minimálpolinomja csak egy x-es szorzóban térhet el egymástól, és így AB és BA nem nulla sajátértékeinek halmaza ugyanaz. Ha $\dim(V) = \dim(W)$, akkor AB és BA sajátértékei ugyanazok.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k \in T[x]$. Ekkor

$$Af(BA)B = a_0AB + a_1ABAB + \ldots + a_k(AB)^{k+1}\,,$$

ami $xf(x)$-nek az AB helyen felvett értéke. Ezért ha f a BA minimálpolinomja, akkor $xf(x)$-nek gyöke AB, azaz AB minimálpolinomja osztója $xf(x)$-nek. Az A és B szerepét megcserélve kapjuk, hogy BA minimálpolinomja is osztója AB minimálpolinomja x-szeresének. Mivel a minimálpolinomok normáltak, AB és BA minimálpolinomjai vagy egyenlőek, vagy az egyik a másiknak x-szerese. Ezért AB és BA nem nulla sajátértékei ugyanazok.

Tegyük föl, hogy $\dim(V) = \dim(W)$, és a 0 nem sajátértéke AB-nek. Ekkor AB invertálható. De akkor A és B is invertálható, mert $\mathrm{Ker}(B)$ szükségképpen nulla és $\mathrm{Im}(A)$ szükségképpen V. Ezért BA is invertálható, és így a 0 nem sajátértéke BA-nak sem. □

Egyszerű példaként legyen $[A] = [1, 1]$ és $[B] = [1, 1]^T$. Ekkor $AB = [2]$, aminek az egyetlen sajátértéke a 2, ugyanakkor BA a csupa 1-esekből álló 2×2-es mátrix, a sajátértékek 0 és 2. Ebben a példában AB invertálható, BA pedig nem (és persze A és B egyike sem invertálható, mert nem egyforma dimenziós vektorterek között mennek).

Most megvizsgáljuk AB és BA sajátértékeinek geometriai és algebrai multiplicitását. Tegyük föl továbbra is, hogy $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(W, V)$. Ha $f \in T[x]$, akkor legyen

$$V_f = \mathrm{Ker}\, f(BA) \quad \text{és} \quad W_f = \mathrm{Ker}\, f(AB)\,.$$

1.3. Állítás. *Ha $f(0) \neq 0$, akkor $A : V_f \to W_f$ és $B : W_f \to V_f$ is bijektív. Speciálisan $\dim V_f = \dim W_f$.*

Bizonyítás. Legyen $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k$, a feltevés szerint $a_0 \neq 0$. Ha $v \in V_f$, akkor V_f definíciója szerint

$$a_0 v + a_1 BA(v) + \ldots + a_k (BA)^k(v) = 0.$$

Erre A-t alkalmazva

$$0 = a_0 A(v) + a_1 ABA(v) + \ldots + a_k (AB)^k A(v) = f(AB)\big(A(v)\big).$$

Tehát $A(v) \in W_f$. Ha $A(v) = 0$, akkor a fenti első egyenletből $a_0 v = 0$, és mivel $a_0 \neq 0$, ezért $v = 0$. Ez azt jelenti, hogy A injektíven képzi V_f-et W_f-be, a dimenziótétel miatt így $\dim V_f \leq \dim W_f$.

Ha A-t és B-t megcseréljük, akkor a fenti gondolatmenet azt adja, hogy B injektíven képzi W_f-et V_f-be, és $\dim V_f \geq \dim W_f$. A két dimenzió tehát egyenlő, és így A és B is bijektív e két altér között. □

Ha speciálisan $f(x) = x - \lambda$, akkor V_f a λ-hoz tartozó sajátaltere BA-nak, W_f pedig a λ-hoz tartozó sajátaltere AB-nek.

1.4. Következmény. *Ha $\lambda \neq 0$, akkor A, illetve B bijektív a fenti két sajátaltér között, melyek dimenziója megegyezik. Speciálisan az AB és BA transzformációk nem nulla sajátértékeinek geometriai multiplicitása megegyezik.*

A fenti állítást csak abban az esetben fogjuk használni a későbbiekben, amikor AB és BA is diagonalizálható. Ezért az alábbiak (a szakasz végéig) első olvasásra kihagyhatók. Az algebrai multiplicitás általános vizsgálatához idézzük föl az alábbi eredményt Freud Róbert tankönyvéből.

1.5. Lemma [[1], 6.6.2. Tétel]. *Legyen C lineáris transzformációja egy V vektortérnek és $m_C = fg$, ahol m_C a C minimálpolinomja, $f, g \in T[x]$ pedig relatív prímek. Ekkor*

$$V = \mathrm{Ker}\, f(C) \oplus \mathrm{Ker}\, g(C).$$

A felbontásban szereplő két altér C-invariáns, és a C transzformáció $\mathrm{Ker}\, f(C)$*-re vett leszűkítésének minimálpolinomja f.*

1.6. Következmény. *Az előző lemma jelöléseivel legyen C_f, illetve C_g a C leszűkítése* $\mathrm{Ker}\, f(C)$*-re, illetve* $\mathrm{Ker}\, g(C)$*-re. Ekkor C karakterisztikus polinomja a C_f és C_g karakterisztikus polinomjainak a szorzata.*

Bizonyítás. Vegyünk $\operatorname{Ker} f(C)$-ben, illetve $\operatorname{Ker} g(C)$-ben egy-egy bázist. Tanultuk, hogy ezek uniója bázis lesz V-ben, és ebben C mátrixa két diagonális blokkra bomlik, melyek különkülön C_f, illetve C_g mátrixai. Ebben a bázisban a karakterisztikus polinomot kiszámolva az állítást kapjuk, hiszen egy ilyen blokkmátrix determinánsa a blokkok determinánsainak a szorzata. □

1.7. Tétel. *Legyenek V és W végesdimenziós vektorterek a T test fölött, $A \in \operatorname{Hom}(V, W)$ és $B \in \operatorname{Hom}(W, V)$. Ekkor AB és BA nem nulla sajátértékeinek algebrai multiplicitása megegyezik. Ha $\dim V = \dim W$, akkor AB és BA karakterisztikus polinomja is egyenlő.*

Bizonyítás. Az 1.2. Tétel szerint van olyan f polinom, amelynek a 0 nem gyöke, továbbá olyan ℓ és m, hogy $m_{AB} = f(x)x^\ell$ és $m_{BA} = f(x)x^m$. Alkalmazzuk az 1.3. Állítást az így kapott f polinomra. Ekkor A-nak, illetve B-nek a V_f, illetve W_f alterekre vett leszűkítése invertálható, és így az 1.1. Állítás azt adja, hogy a BA transzformáció V_f-re vett C leszűkítésének ugyanaz a karakterisztikus polinomja, mint az AB transzformáció W_f-re vett D leszűkítésének, azaz $k_C = k_D$.

Legyen F a BA transzformáció $\operatorname{Ker}(BA)^m$-re vett leszűkítése. Mivel $f(0) \neq 0$, ezért f relatív prím x^m-hez. Az előző állítás szerint így $k_{BA} = k_C(x)k_F(x)$. Az 1.5. Lemma szerint C minimálpolinomja f, és ezért C sajátértékeinek halmaza ugyanaz, mint BA nem nulla sajátértékeinek halmaza. Hasonlóan, F minimálpolinomja x^m, ezért $k_F(x) = \pm x^t$ alkalmas t egészre. Ezért ha $\lambda \neq 0$, akkor λ algebrai multiplicitása ugyanaz a BA és C transzformációk esetében. Hasonló gondolatmenet adja, hogy ugyanaz a multiplicitás D és AB esetében is. De láttuk, hogy a multiplicitás ugyanaz C és D esetében is, ezért a tétel első állítását beláttuk.

Ha $\dim V = \dim W$, akkor AB és BA karakterisztikus polinomjának ugyanaz a foka, és mivel $\operatorname{gr} k_C = \operatorname{gr} k_D$, ezért az x kitevője is ugyanaz lesz AB és BA karakterisztikus polinomjában. □

2. Alternatív megközelítések

Megmutatjuk közvetlenül is, hogy ha A és B invertálható, akkor AB és BA nem nulla sajátértékeinek geometriai multiplicitása megegyezik. Legyen W egy k-dimenziós, $\lambda \neq 0$-hoz tartozó sajátaltere AB-nek, tehát $w \in W$ esetén $ABw = \lambda w$. Átrendezéssel kapjuk, hogy $\lambda^{-1}(Bw) = A^{-1}B^{-1}(Bw)$, azaz $A^{-1}B^{-1}$-nek λ^{-1} legalább k-szoros sajátértéke. De $A^{-1}B^{-1}$ inverze BA, ezért λ legalább k-szoros sajátértéke BA-nak.

Az algebrai multiplicitások egyenlőségének bizonyítására is van alternatív gondolatmenet. Tanultuk, hogy ha a karakterisztikus polinom lineáris tényezőkre bomlik, akkor egy mátrix nyoma a (karakterisztikus polinombeli multiplicitással vett) sajátértékeinek összege.

Legyen A egy $n \times n$-es mátrix, ekkor A^k sajátértékei az A sajátértékeinek k-adik hatványai, azonos algebrai multiplicitással és ugyanazokkal a sajátvektorokkal (persze ha két sajátérték k-adik hatványa egyenlő, akkor a multiplicitások összeadódnak). Ezért A^k nyoma az A sajátértékeinek k-adik hatványösszege. A hatványösszegek viszont a Newton–Girard-formulák miatt meghatározzák a sajátértékek elemi szimmetrikus polinomjait, és így magukat a sajátértékeket is (algebrai multiplicitásukkal együtt). Elegendő A első n hatványát tekinteni.

2.1. Feladat. *Mutassuk meg mátrixokkal való számolással, hogy AB és BA nyoma (azaz a főátlóbeli elemek összege) ugyanaz.*

Mivel $(AB)^k$ és $(BA)^k$ nyoma is ugyanaz minden k-ra, ezért AB és BA nem nulla sajátértékeinek algebrai multiplicitása megegyezik.

Ugyanezzel a gondolatmenettel adódik annak a feladatnak a megoldása is, hogy egy $n \times n$-es mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha az első n hatványának nulla a nyoma. Ekkor ugyanis minden sajátérték nulla lesz.

Az 1.3. Állítást az $(x-\lambda)^k$ polinomra alkalmazva az is kiderül, hogy AB és BA Jordan-alakjában a nem nulla sajátértékekhez tartozó blokkok is megfelelnek egymásnak. Ebből is látszik, hogy a geometriai és algebrai multiplicitások egyenlők.

Szokásos megközelítés komplex fölött, hogy a vizsgálandó mátrixot invertálható mátrixok határértékeként állítjuk elő, és az 1.1. Állítást alkalmazzuk. Ezzel a módszerrel a Cayley–Hamilton-tétel is belátható.

3. Lineáris leképezés adjungáltja

A következő tétel az adjungált transzformáció fogalmát általánosítja lineáris leképezésekre.

3.1. Tétel. *Legyenek V és W (valós vagy komplex fölötti) euklideszi terek. Tetszőleges $A \in \mathrm{Hom}(V,W)$ és $B \in \mathrm{Hom}(W,V)$ leképezésekre, továbbá tetszőleges V-beli* $\mathbf{b}$ *és W-beli* $\mathbf{d}$ *ortonormált bázisokra igaz a következő. A*

$$\langle B(w), v\rangle = \langle v, A(w)\rangle$$

összefüggés akkor és csak akkor igaz minden $v \in V$ és $w \in W$ esetén, ha az $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ és a $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}$ mátrixok egymás transzponált konjugáltjai.

A bizonyítás ugyanaz, mint transzformációk esetében. Az A mátrixának felírása a következőképpen módosul.

3.2. Állítás. *Legyen $A : V \to W$ lineáris leképezés,* $\mathbf{b}$ *tetszőleges bázis V-ben, és* $\mathbf{d}$ *ONB W-ben. Ekkor az $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ mátrix i-edik sorának j-edik eleme $\langle d_i, A(b_j)\rangle$.*

A fentiek szerint, tehát minden A leképezéshez egyértelműen tartozik egy olyan B, amely a tétel feltételét teljesíti, ezt most is A^*-gal jelöljük, és A adjungáltjának nevezzük. Nyilván $(A^*)^* = A$, és ha értelmes a szorzat, akkor $(AB)^* = B^*A^*$.

Szükségünk lesz a bázistranszformáció képletére általános leképezések esetén.

3.3. Tétel. *Legyen $A : V \to W$ egy lineáris leképezés,* $\mathbf{b}$ *és* $\mathbf{c}$ *bázis V-ben,* $\mathbf{d}$ *és* $\mathbf{f}$ *bázis W-ben, R a* $\mathbf{b}$*-ről* $\mathbf{c}$*-re való áttérés mátrixa (azaz $R = [\ldots, [c_i]_{\mathbf{b}}, \ldots]$ ugyanúgy, mint a lineáris transzformációkra vonatkozó bázistranszformációs tétel esetében), S pedig a* $\mathbf{d}$*-ről* $\mathbf{f}$*-re való áttérés mátrixa. Ekkor*

$$[A]_{\mathbf{f}/\mathbf{c}} = S^{-1}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}R\,.$$

Bizonyítás. Ugyanúgy járunk el, mint transzformációk esetében. Legyen $B : V \to V$, illetve $C : W \to W$ az a lineáris transzformáció, amelyre $B(b_i) = c_i$, illetve $C(d_i) = f_i$ minden i-re, ezek az előírhatósági tétel miatt léteznek. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{f}/\mathbf{c}} = [C]_{\mathbf{f}/\mathbf{d}}[C^{-1}]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}[B^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{c}}\,,$$

és itt $[C]_{\mathbf{f}/\mathbf{d}}$ valamint $[B^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{c}}$ a megfelelő méretű egységmátrix, $[C^{-1}]_{\mathbf{d}/\mathbf{d}} = S^{-1}$, végül $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = R$. □

Legyen most mind a négy bázis ortonormált és $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = M$. Definiáljuk a $B = A^* : W \to V$ leképezést úgy, hogy $[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = M^*$ legyen. Második bizonyítást adunk arra a tényre, hogy ha másik bázispárt választunk, akkor a B leképezés ugyanaz marad.

Ha a fenti bázistranszformációt végrehajtjuk, akkor M-ből $S^{-1}MR$ lesz, M^*-ból pedig $R^{-1}M^*S$ (hiszen $B : W \to V$, ezért R és S szerepe megcserélődik). Tehát azt kell megmutatnunk, hogy ez a két mátrix is egymás transzponált konjugáltja. Tudjuk, hogy $(KN)^* = N^*K^*$ tetszőleges összeszorozható mátrixokra. Mivel a bázisaink ortonormáltak, B és C is unitér transzformáció, azaz $S^* = S^{-1}$ és $R^* = R^{-1}$. Ezért tényleg

$$(S^{-1}MR)^* = R^*M^*(S^{-1})^* = R^{-1}M^*S\,.$$

Beláttuk tehát, hogy a $B = A^*$ leképezés tényleg nem függ a választott ONB-től.

Most kicsit haladóbb megjegyzést teszünk. Ha $A : V \to W$ lineáris leképezés, akkor az A^* leképezést szokás úgy értelmezni, hogy ne W-ből V-be, hanem a $\mathrm{Hom}(W,T)$ vektortérből a $\mathrm{Hom}(V,T)$-be képezzen: ha $g \in \mathrm{Hom}(W,T)$, akkor $A^*(g) = g \circ A$. Mivel $g : W \to T$, ezért ez a kompozíció tényleg V-ből T-be képez.

Ez az értelmezés nemcsak euklideszi tereken mondható el, és könnyen ellenőrizhető, hogy alkalmas bázispárban A^* mátrixa A mátrixának transzponáltja lesz. Ennek igazi oka az, hogy a $\mathrm{Hom}(W,T)$ vektortér W-vel, a $\mathrm{Hom}(V,T)$ pedig V-vel izomorf. Euklideszi terek esetében egy ilyen izomorfizmust megadhatunk a következőképpen: ha $w \in W$, akkor ennek képe az izomorfizmusnál az a $W \to T$ leképezés, ami tetszőleges u vektorhoz $\langle w, u\rangle$-t rendel. Az érdeklődő Olvasó kiszámolhatja, hogy ha ennek az izomorfizmusnak a mentén azonosítjuk W-t és $\mathrm{Hom}(W,T)$-t, akkor a most definiált A^* ugyanaz a leképezés lesz, mint amit fent bevezettünk. Azt is érdemes meggondolni, hogy ez az azonosítás a w mátrixát (ami egy oszlopvektor) azonosítja annak transzponáltjával (ami egy sorvektor, és ezért egy $W \to T$ leképezés mátrixa).

4. Szinguláris felbontás

Az 1. Szakaszban bizonyítottakat alkalmazzuk arra az esetre, amikor $B = A^*$. Feltesszük, hogy $A : V \to W$ lineáris leképezés, ahol V és W euklideszi terek.

4.1. Állítás. *AA^* és A^*A is önadjungált, és sajátértékeik nemnegatív valós számok.*

(Vagyis e leképezések mátrixához tartozó kvadratikus alak pozitív szemidefinit.)

Bizonyítás. Nyilván $(AA^*)^* = (A^*)^*A^* = AA^*$. Legyen $AA^*(v) = \lambda v$. Ekkor

$$\|A^*(v)\|^2 = \langle A^*(v), A^*(v)\rangle = \langle v, AA^*(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \lambda\|v\|^2\,.$$

Ha $v \neq 0$, akkor λ nemnegatív valós, hiszen két nemnegatív valós szám hányadosa. □

Tanultuk, hogy minden önadjungált transzformáció normális, és ezért ortonormált bázisban diagonalizálható, sőt azt is, hogy az önadjungált transzformációk pontosan azok a normális transzformációk, amelyeknek minden sajátértéke valós. A fenti állítás tehát annyi többletet ad, hogy most a sajátértékek nem lehetnek negatívak.

Legyen $\lambda > 0$ sajátértéke A^*A-nak, és $V_\lambda \subseteq V$ a hozzá tartozó sajátaltér. Az 1. Szakaszban bizonyítottakat az $f(x) = x - \lambda$ polinomra alkalmazva azt kapjuk, hogy a V_λ altér A-nál vett $A(V_\lambda) = \{A(v) : v \in V_\lambda\}$ képe éppen AA^*-nak a λ-hoz tartozó sajátaltere, és A, valamint A^* is bijekció e két altér között. Válasszunk egy $\mathbf{b}$ ONB-t V_λ-ban. Ekkor

$$\langle A(b_i), A(b_j)\rangle = \langle b_i, A^*A(b_j)\rangle = \langle b_i, \lambda b_j\rangle = \lambda\langle b_i, b_j\rangle\,.$$

Ezért a $d_i = \left(1/\sqrt{\lambda}\right)A(b_i)$ vektorok ONB-t alkotnak $A(V_\lambda)$-ban.

Mivel A^*A normális, a sajátalterei páronként ortogonálisak, és direkt összegük V. Válasszunk ONB-ket ezekben a sajátalterekben. A kapott vektorok együtt V-nek ortonormált bázisát alkotják, hiszen a sajátalterek páronként merőlegesek, jelöljük ezt is $\mathbf{b}$-vel. Mivel AA^* is normális, ennek a sajátalterei is páronként merőlegesek. Ezért a fent definiált d_i vektorok is ortonormált rendszert alkotnak.

Legyen most V_0 az A^*A nullához tartozó sajátaltere, azaz a magtere. Ha $v \in V_0$, akkor $0 = \langle v, A^*A(v)\rangle = \langle A(v), A(v)\rangle$, ahonnan $A(v) = 0$. Ezért a $\mathbf{b}$ bázisnak az V_0-ba eső vektorai nullába képződnek. (Ezzel beláttuk, hogy $\operatorname{Ker} A = \operatorname{Ker} A^*A$.)

Vegyünk egy tetszőleges ONB-t $\operatorname{Ker} AA^* = \operatorname{Ker} A^*$-ban, és tegyük hozzá az elemeit a fent definált d_i vektorokhoz, így W-ben is kapunk egy $\mathbf{d}$ ONB-t. A konstrukciónk szerint $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ diagonális, a főátlóban az V_λ-beli vektorokhoz tartozó oszlopokban $\sqrt{\lambda}$ áll, a $\operatorname{Ker}(A^*A)$-hoz tartozó oszlopokban pedig nulla. Ezzel beláttuk a szinguláris érték tétel következő változatát.

4.2. Tétel. *Legyen $A : V \to W$ lineáris transzformáció két (komplex vagy valós) euklideszi tér között. Ekkor létezik olyan $\mathbf{b}$ ONB V-ben, és olyan $\mathbf{d}$ ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes). A D főátlójában szereplő nem nulla számok pozitív valósak, és az A^*A transzformáció sajátértékeinek négyzetgyökei, ugyanakkora multiplicitással, mint amilyennel A^*A-ban szerepelnek. Ugyanez igaz A^*A helyett AA^*-ra is. A $\mathbf{b}$ bázis vektorai sajátvektorai A^*A-nak, a $\mathbf{d}$ bázis vektorai pedig sajátvektorai AA^*-nak.*

Ha valós euklideszi térben dolgozunk, akkor AA^T és A^TA is szimmetrikus transzformációk, tehát a főtengely-tétel miatt valós térben is diagonalizálhatók. A fenti bizonyítás tehát ugyanúgy működik.

A D főátlójában szereplő számokat A **szinguláris értékeinek** nevezzük. Ezek tehát a nulla kivételével egyértelműen meghatározottak, mint AA^* (vagy akár A^*A) sajátértékeinek nemnegatív négyzetgyökei. Az AA^* sajátvektorait bal szinguláris vektoroknak, az A^*A sajátvektorait pedig jobb szinguláris vektoroknak hívjuk. A bal és jobb szavak értelmét a tétel mátrixos változata árulja el.

4.3. Tétel. *Legyen M komplex elemű mátrix. Ekkor léteznek olyan R és S unitér mátrixok, hogy $A = SDR^*$, ahol D (nem feltétlenül négyzetes) diagonális mátrix. Az S mátrix oszlopai bal-, az R oszlopai jobb szinguláris vektorai M-nek. A D főátlójában szereplő nem nulla számok pozitív valósak, és az M^*M mátrix sajátértékeinek négyzetgyökei, ugyanakkora multiplicitással, mint amilyennel M^*M-ben szerepelnek. Ugyanez igaz M^*M helyett MM^*-ra is. Ha M valós mátrix, akkor R és S is választható valós, ortogonális mátrixnak.*

Bizonyítás. Legyen $M \in \mathbb{C}^{n\times m}$. Definiáljuk az $A : \mathbb{C}^m \to \mathbb{C}^n$ leképezést az $A(v) = Mv$ képlettel. Alkalmazzuk erre a leképezésre az előző tételt, majd a bázistranszformáció 3.3. Tételét, ahol R az áttérés mátrixa $\mathbb{C}^m$ szokásos bázisáról $\mathbf{b}$-re, S pedig $\mathbb{C}^n$ szokásos bázisáról $\mathbf{d}$-re. Mivel A mátrixa a szokásos bázispárban M, azt kapjuk, hogy $D = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = S^{-1}MR$. Átrendezéssel $M = SDR^{-1}$. Itt R oszlopvektorai a $\mathbf{b}$-beli vektorok, amik valóban sajátvektorai A^*A-nak, tehát jobb oldali szinguláris vektorok. Hasonlóan S oszlopai bal szinguláris vektorok. Az R és S unitér mátrixok, hiszen a megfelelő transzformációk ONB-t ONB-be visznek. Speciálisan $R^* = R^{-1}$. A valós esetben valós euklideszi térben dolgozva ortogonális mátrixokat kapunk. □

Az eddigiek egy következményét is érdemes megfogalmazni.

4.4. Következmény. *Legyen $A : V \to W$ lineáris transzformáció két (komplex vagy valós) euklideszi tér között. Ekkor $\operatorname{Im} A = (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$, $\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^\perp$, és A, valamint A^* is bijektív e két altér között.*

Ez azért következik a fenti tételből, mert $\operatorname{Ker}(A) = \operatorname{Ker}(A^*A)$ ortogonális kiegészítő altere éppen A^*A nem nulla sajátaltereinek összege. Most adunk erre a következményre egy közvetlen bizonyítást is.

Szűkítsük le az A^* leképezést $\operatorname{Im}(A)$-ra. Korábban láttuk, hogy ha $A^*A(u) = 0$, akkor $A(u) = 0$. Ezért ez a leszűkítés injektív leképezés, azaz $\dim \operatorname{Im}(A^*) \geq \dim \operatorname{Im}(A)$. Megcserélve A és A^* szerepét azt kapjuk, hogy a két képtér egyenlő dimenziós, és A és A^* is bijektíven hat közöttük. A dimenziótétel miatt

$$\dim(\operatorname{Ker} A^*)^\perp = \dim W - \dim \operatorname{Ker} A^* = \dim \operatorname{Im} A^* = \dim \operatorname{Im} A\,.$$

Viszont $\operatorname{Im} A \subseteq (\operatorname{Ker} A^*)^\perp$, mert ha $w \in \operatorname{Ker} A^*$, akkor $\langle A(v), w\rangle = \langle v, A^*(w)\rangle = 0$ minden $v \in V$-re. Ezért a valódi altér dimenziójáról szóló tétel miatt a két altér egyenlő.

5. Geometriai interpretáció

Ha V euklideszi tér, akkor az 1 normájú vektorok a V **egységgömbjét** alkotják. Egy $A : V \to W$ lineáris leképezésnél ennek képe a W tér egy ellipszoidja lesz, az A nem nulla szinguláris értékei pedig az ellipszoid féltengelyeinek a hosszát adják meg.

Valóban, legyen $A(b_i) = \mu_i d_i$, ahol $1 \leq i \leq m$ esetén $\mu_i \neq 0$, ha pedig $i > m$, akkor $\mu_i = 0$. Ha $v = \sum_{i=1}^n \lambda_i b_i$, ahol $\sum |\lambda_i|^2 \leq 1$, akkor $A(v) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu_i d_i$. Vagyis az egységgolyó képe azokból a $w = \sum_{i=1}^m \nu_i d_i \in W$ vektorokból áll, melyekre $\sum |\nu_i/\mu_i|^2 \leq 1$.

A $\sum |\nu_i/\mu_i|^2 = 1$ egyenlet egy ellipszoidot ad, melynek (páronként merőleges) tengelyei $b_1, \ldots, b_m$, a féltengelyek hossza pedig $\mu_1, \ldots, \mu_m$. Ha egyik μ_i sem nulla, akkor a fenti levezetésben $\leq$ helyett egyenlőséget írhatunk, és a gömbfelszín képe ez az ellipszoid lesz. Általában csak annyit állíthatunk, hogy az egységgolyó képe ennek az ellipszoidnak a határát és belsejét adja. Például ha A a térben az xy-síkra való merőleges vetítés, akkor a térbeli egységgömbhéj képe az xy-síkon nemcsak az egységkört, hanem annak belsejét is kitölti.

6. Poláris felbontás

Minden z komplex szám felírható $r\varepsilon$ alakban, ahol r nemnegatív valós, ε pedig 1 abszolút értékű. Itt r a z abszolút értéke. Ezt általánosítja a következő tétel.

6.1. Tétel. *Legyen A lineáris transzformáció egy euklideszi téren. Ekkor A felírható BU alakban, ahol B önadjungált, pozitív szemidefinit, U pedig unitér transzformáció.*

(Szokás a $B = |A|$ jelölés.) Az állítás következik a szinguláris felbontási tételből: ha $A = SDR^*$, akkor legyen $B = SDS^*$ és $U = SR^*$. Közvetlenül is igazolható a tétel, ha B-t az AA^* négyzetgyökének választjuk.

7. A Moore–Penrose-féle pszeudoinverz

Az előző szakasz eredményei alapján egy $A : V \to W$ lineáris leképezést a következőképpen próbálhatunk meg „invertálni”. A 4.4. Következmény szerint A bijektíven hat $\operatorname{Im} A^*$ és $\operatorname{Im} A$ között, ezért az $\operatorname{Im} A$ altéren vehetjük A inverzét úgy, hogy az eredmény $\operatorname{Im} A^*$-ba képződjön. A $\operatorname{Ker} A^*$ altér vektorait vigyük nullába. Mivel $\operatorname{Im} A$ és $\operatorname{Ker} A^*$ egymás ortogonális kiegészítő alterei, így egyértelműen definiáltunk egy $A^+ : W \to V$ leképezést. Ezt nevezzük az

A leképezés **Moore–Penrose-féle pszeudoinverzének.** Meg fogjuk látni, miért hasznos ezt tekinteni, előbb azonban jellemezzük a fogalmat.

7.1. Tétel. *Legyen $A : V \to W$, és $\mathbf{b}$ valamint $\mathbf{d}$ olyan ONB V-ben, illetve W-ben, amit a 4.2. Szinguláris Felbontási Tétel eredményez. Ha $A(b_i) = \mu_i d_i$, ahol $\mu_i \neq 0$, akkor legyen $B(d_i) = (1/\mu_i)b_i$, a többi d_i vektort pedig képezze B nullába. Ekkor*

(1) *B a pszeudoinverze A-nak, azaz $B = A^+$.*
(2) *Ha $v \in V$, akkor $A^+A(v)$ a v vektor merőleges vetülete az $\mathrm{Im}(A^*) = (\mathrm{Ker}\, A)^\perp$ altérre, és $AA^+A(v) = A(v)$.*
(3) *Ha $w \in W$, akkor $AA^+(w)$ a w merőleges vetülete az $\mathrm{Im}(A) = (\mathrm{Ker}\, A^*)^\perp$ altérre, és $A^+AA^+(w) = A^+(w)$.*

Bizonyítás. Legyen $A(b_i) = \mu_i d_i$, ahol $1 \leq i \leq m$ esetén $\mu_i \neq 0$, ha pedig $i > m$, akkor $\mu_i = 0$. Ekkor $1 \leq i \leq m$ esetén $A^*(d_i) = \mu_i b_i$, ha pedig $i > m$, akkor $A^*(d_i) = 0$. Tehát $\mathrm{Im}\, A$-t $d_1, \ldots, d_m$, $\mathrm{Im}\, A^*$-ot pedig $b_1, \ldots b_m$ generálja. Ezért a B leképezés tényleg inverze A-nak e két altér között, és az inverz egyértelműsége miatt megegyezik A^+-szal minden olyan d_i vektoron, ahol $i \leq m$. Ha viszont $i > m$, akkor mind A^+, mind B nullába viszi d_i-t és ezért $A^+ = B$.

Írjuk föl v-t $\sum \beta_i b_i$ alakban. Ekkor $A(v) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i \mu_i d_i$, hiszen $i > m$ esetén $A(b_i) = 0$. Ezért $A^+A(v) = \sum_{i=1}^{m} \beta_i b_i$, ami tényleg v vetülete a $b_1, \ldots, b_m$ által generált $\mathrm{Im}\, A^*$ altérre.

Legyen $w = \sum \delta_i d_i$. Mivel $i > m$ esetén $A^+(d_i) = 0$, ezért $AA^+(w) = \sum_{i=1}^{m} \delta_i d_i$, ami w vetülete a $d_1, \ldots, d_n$ által generált $\mathrm{Im}(A)$ altérre. □

A leképezések mátrixait véve a következőt kapjuk.

7.2. Következmény. *Ha az M mátrix szinguláris felbontása SDR^{-1}, akkor $A^+ = RD'S^{-1}$, ahol a D' mátrix úgy kapható a (diagonális) D^T mátrixból, hogy a nem nulla elemeinek reciprokát vesszük, a többi elem helyén pedig meghagyjuk a nullát.*

Megjegyezzük, hogy az M mátrix pszeudoinverze az $(M^*M + \alpha E)^{-1}M^*$ mátrixok határértéke, ha α tart a nullához. Ezt az állítást is könnyű ellenőrizni a most használt d_i bázisvektorokon.

7.3. Tétel. *Legyen $Mx = w$ lineáris egyenletrendszer és $v = M^+w$.*

(1) *Ha az egyenletrendszer megoldható, akkor v az a megoldás, amelynek a normája a lehető legkisebb.*
(2) *Ha az egyenletrendszer nem oldható meg, akkor v az a vektor, amelyre Mv a lehető legközelebb van w-hez (vagyis a legkisebb hibával „oldja meg” az egyenletrendszert).*

Bizonyítás. Ha $Mx = w$, akkor a 7.1. Tétel szerint $Mv = Mx = w$, továbbá v az x merőleges vetülete egy altérre, és ezért $\|v\| \leq \|x\|$ (a v-t úgy kapjuk, hogy az x vektor $\mathbf{b}$ bázisban felírt koordinátavektorának néhány komponensét kinullázzuk).

A lehetséges megoldások tere az Mx alakú vektorok halmaza. A 7.1. Tétel utolsó állítása azt mondja, hogy Mv a w merőleges vetülete erre az altérre, vagyis a w-hez legközelebbi vektor azok közül, amelyekre az egyenletrendszer megoldható (tehát $\|Mx - w\|$ az $x = v$ helyen lesz minimális). □

Hivatkozások

[1] Freud Róbert: *Lineáris Algebra.* ELTE Eötvös Kiadó, 2014.
www.tankonyvtar.hu/hu/tartalom/tamop425/2011_0001_527_LinearisAlgebra/adatok.html