1. Alterek direkt összege

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)
Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U+W$ elemeinek $u+w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor *egyértelmű*, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0+v = v+0$ két különböző, megfelelő fölírás, így ez *nem egyértelmű*. □

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)
Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása *egyértelmű*, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U+W$ az U és W *direkt összege*, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza. W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak. Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros. W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan. Ekkor $T[x] = U \oplus W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás
Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás
Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Mivel $c_1, \ldots, c_m$ független, ezért $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. □

Direkt kiegészítő altér

Definíció
Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$. Ekkor W az U (egyik) *direkt kiegészítő altere.*

Állítás
Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben
Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-*ban*.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.
Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$. Ekkor $V = U \oplus W$.
A bizonyítás hasonló az előző tételéhez: HF. □

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)
Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek *minden* H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H *ortogonális kiegészítő altere.*

Tétel (F8.1.7. Tétel)
Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$. Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás
Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$. Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^\perp = \{0\}$.
Kell még: $U + U^\perp = V$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)
Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$. A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is. Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. □

Az u-t a v vektor U-ra vett *merőleges vetületének* hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)
$(U^\perp)^\perp = U$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$, $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

2. Invariáns altér és blokkfelbontás

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)
A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak *invariáns altere*, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)
Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás
Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^{\perp}$. Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire, azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v)\rangle = 0$. Ez igaz, mert $\langle w, A^*(v)\rangle = \langle A(w), v\rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$ és $v \in W^{\perp}$. □

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (<u>HF</u>)
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben, U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér. Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es, az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,
és a megszorítás mátrixa a $b_1, \ldots, b_m$ bázisban K.
Hasonlóan A megszorítható W-re, és ennek mátrixa $b_{m+1}, \ldots, b_n$-ben L.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális. Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$. Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás
Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \underline{\mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n}$,
és $\lambda v = \underline{\mu_1 \lambda b_1 + \ldots + \mu_n \lambda b_n}$.
Tehát $A(v) = \lambda v$ akkor és csak akkor, ha $\mu_k = 0$ minden k-ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$.
Ha a bázis ortonormált, akkor a bázis két diszjunkt részhalmaza két merőleges alteret generál (<u>HF</u>). □

3. Szép alak komplex felett

A fő eredmény
V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A *normális* transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)
Az A pontosan akkor diagonalizálható *ortonormált* bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása
Az A^* mátrixa az $[A]_{\mathbf{b}}$ transzponált konjugáltja. Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is. Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is. Az előző Állítás miatt A sajátalterei páronként merőlegesek.

HF: Ha $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor A és A^* sajátalterei ugyanazok.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)
Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás
Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda}w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda}w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda}w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda}w, A^*(w) - \overline{\lambda}w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és
$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért
$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle = \langle A(w), A(w)\rangle$,
ami $\langle \lambda w, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle w, w\rangle$. Összevonva minden kiesik. $\square$

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény
Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere. Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás
Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Házi feladat
Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris transzformációk, és $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns, és ezért van közös sajátvektoruk.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$. Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint.
1-dimenzióban igaz. Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak. Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$). Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is, ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns. Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$. Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB, mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben, mert W ortogonális $W^\perp$-re, és $V = W \oplus W^\perp$. Ez a bázis A sajátvektoraiból áll. $\square$

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)
Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas *ortonormált* bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat
Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns, ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns. Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ONB, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független, így bázis V-ben. Normáljuk b_n-et. HF: A kapott bázisban A mátrixa felső háromszögmátrix. $\square$

4. Szép alak valós felett

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$. Legyen $\mathbf{b}$ ONB és $M = [A]_{\mathbf{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix. Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak. Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ *valós* sajátértéke. Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns. Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.
Azt igazoltuk, hogy van *„elegendő” ortonormált valós* sajátvektor.
HF: $A = A^*$, $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w \implies \lambda = \mu$ vagy $v \perp w$.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű *ellipszist* a síkon. A két tengely a két koordinátatengely, így *merőlegesek*. A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,
és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$. A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg. Hasonlóan felírhatunk minden *másodfokú* síkgörbét, és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk. Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk! Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy *kúp*. Az ellipszist ebből a $z = 1$ sík metszi ki.

5. A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele
Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás
Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól. A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából, tehát akkor a nullák száma sem függ a bázistól.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma
Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás
Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v,v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$
$$B(w,w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v,v) = B(-w,-w) = B(w,w)$, így mindkét összeg nulla.
Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$.
Ezért $\sum y_j w_j = 0$, így a függetlenség miatt minden $y_j = 0$. □

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis. Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban. Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van. Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1), továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így $k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$. A két bázist megcserélve $k_2 \leq k_1$. □

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan $\mathbf{b}$ ONB V-ben, és olyan $\mathbf{d}$ ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A *szinguláris értékei*, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok. A pozitív szinguláris értékek az E féltengelyeinek hosszai. Mátrixosan:

Legyen M komplex elemű mátrix. Ekkor léteznek olyan R és S unitér mátrixok, hogy $A = SDR^*$, ahol D diagonális mátrix. Ha M valós, akkor R és S is választható valós, ortogonális mátrixnak.

Az S mátrix oszlopai bal-, az R oszlopai jobb *szinguláris vektorai* M-nek. Ezek MM^*, illetve M^*M sajátvektorai, a szinguláris értékek pedig a megfelelő sajátértékek négyzetgyökei.

6. Összefoglaló

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek
A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója. Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése. Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása. Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^*-invariáns. Normális transzformáció sajátalterei. Szingulárisérték-felbontási tétel*.

Irodalom a szingulárisérték-felbontáshoz:
`https://algebra.elte.hu/wp-content/uploads/2024/02/szingularis4.pdf`