1. Az euklideszi terek geometriája

Bázishoz tartozó skaláris szorzat

Emékeztető

Az $\mathbb{R}^n$ vektortérbeli $v = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \dots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \dots \\ \mu_n \end{bmatrix}$ vektorok *skaláris szorzata* $\lambda_1\mu_1 + \lambda_2\mu_2 + \ldots + \lambda_n\mu_n$. Jele $\langle v, w\rangle$.
$\langle v, w\rangle = v^T w$, azaz *mátrixszorzással* is felírható.

Freud, 8.1.1. Definíció
Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor

$$\langle v, w\rangle = \lambda_1\mu_1 + \ldots + \lambda_n\mu_n$$

a $b_1, \ldots, b_n$ *bázishoz tartozó skaláris szorzat*.

A fenti $\mathbb{R}^n$-ben a *szokásos bázishoz* tartozó skaláris szorzat.

Euklideszi tér

F8.1.3. Definíció
Legyen V véges dimenziós vektortér $\mathbb{R}$ fölött. A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{R}$ függvény (absztrakt) *skaláris szorzat*, ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$.

(3) $\langle w, u + v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

(5) $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle$ (*szimmetrikus*).

(6) $\langle v, v\rangle \geq 0$ és $\langle v, v\rangle = 0 \iff v = 0$ (*pozitív definit*).

Euklideszi tér: skaláris szorzattal ellátott vektortér.

(1) és (2) együttes neve: *az első változóban lineáris* (vagyis $A(v) = \langle v, w\rangle$ lineáris leképezés minden rögzített w-re).

Hossz, távolság

Állítás
Minden bázishoz tartozó skaláris szorzat teljesíti az előző definícióban felsorolt hat tulajdonságot.

Bizonyítás
Az (1)–(5) igazolása HF. A (6) azért igaz, mert $\langle v, v\rangle = \lambda_1^2 + \ldots + \lambda_n^2 > 0$, kivéve ha mindegyik $\lambda_j = 0$. $\square$

Belátjuk majd, hogy minden skaláris szorzat bázishoz tartozik.

A továbbiakban V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött és $u, v, w \in V$.

Freud, 8.2.1. és 8.2.4 Definíció
A v *normája* vagy *hossza* $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$. A v és w *távolsága* $\|v - w\|$.

Szög, háromszög-egyenlőtlenség

F8.2.7. és F8.1.5. Definíció
Legyen V euklideszi tér $\mathbb{R}$ fölött, és $v, w \in V$. A v, w nem nulla vektorok *szögén* azt a $0 \le \alpha \le 180°$ szöget értjük, amelyre $\langle v, w\rangle = \|v\|\|w\| \cos\alpha$.
v *merőleges* (*ortogonális*) w-re, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele $v \perp w$.

F8.2.8. Cauchy–Bunyakovszkij–Schwartz-egyenlőtlenség
$|\langle v, w\rangle| \le \|v\|\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w párhuzamos, azaz lineárisan összefüggő. (Emiatt két vektor szöge értelmes, mert $-1 \le \cos\alpha \le 1$ jön ki.)

F8.2.2. Háromszög-egyenlőtlenség
$\|v+w\| \le \|v\|+\|w\|$, és egyenlőség pontosan akkor áll, ha v és w egyike a másik *nemnegatív* valós számszorosa.

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása

Állítás
Ha $a > 0$, akkor az $ax^2+bx+c \in \mathbb{R}[x]$ polinom pontosan akkor vesz föl mindenütt nemnegatív értéket, ha $b^2 - 4ac \le 0$. Ha ez teljesül, akkor $ax^2 + bx + c = 0$ csak úgy lehetséges valamilyen $x \in \mathbb{R}$-re, ha $b^2 - 4ac = 0$.

Bizonyítás: Teljes négyzetté való kiegészítéssel:
$ax^2 + bx + c = a\big(x + (b/2a)\big)^2 - (b^2 - 4ac)/4a.$ □

A CBS-egyenlőtlenség bizonyítása
Ha $v = 0$, akkor az állítás igaz. Tetszőleges $x \in \mathbb{R}$ esetén
$0 \le \langle xv + w, xv + w\rangle = x^2\langle v, v\rangle + 2x\langle v, w\rangle + \langle w, w\rangle$.
Ez x-ben másodfokú polinom, melynek a főegyütthatója pozitív.
Így $\big(2\langle v, w\rangle\big)^2 \le 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$. Négyzetgyökvonással kész.

A bizonyítások folytatása

CBS-egyenlőség
Ha $\big(2\langle v, w\rangle\big)^2 = 4\langle v, v\rangle\langle w, w\rangle$, akkor a fenti másodfokú egyenletnek létezik egy valós λ gyöke. Erre $\langle \lambda v + w, \lambda v + w\rangle = 0$, azaz $\lambda v + w = 0$. □

Háromszög-egyenlőtlenség
Mivel mindkét oldal nemnegatív, elég a négyzetét belátni.
$\langle v,v\rangle + 2\langle v,w\rangle + \langle w,w\rangle = \langle v+w, v+w\rangle = \|v+w\|^2$
$\langle v,v\rangle + 2\|v\|\|w\| + \langle w,w\rangle = \|v\|^2 + 2\|v\|\|w\| + \|w\|^2 = (\|v\| + \|w\|)^2$
A CBS-egyenlőtlenség miatt $\|v+w\|^2 \leq (\|v\| + \|w\|)^2$.
Egyenlőség akkor áll, ha $\langle v,w\rangle = |\langle v,w\rangle|$, vagyis $\langle v,w\rangle \geq 0$
és a CBS-ben egyenlőség van.
Azaz $w = -\lambda v$, továbbá $0 \leq \langle v,w\rangle = \langle v, -\lambda v\rangle = -\lambda\langle v,v\rangle$,
ami azzal ekvivalens, hogy $-\lambda \geq 0$. $\square$

2. Ortogonalitás

Ortonormált bázis

F8.1.4. Definíció
Normált vektor: hossza 1. A v vektor „normáltja” $v/\|v\|$.
Ortogonális vektorrendszer: bármely két eleme ortogonális.
Ortonormált vektorrendszer: ortogonális, elemei normáltak.

Tétel
Tegyük föl, hogy $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázis.
Ekkor minden v-re $v = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_n, v\rangle b_n$.

Azaz a koordináták kiszámításához nem kell egyenletrendszer!

Bizonyítás
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor $\langle b_j, v\rangle = \sum_{k=1}^n \lambda_k \langle b_j, b_k\rangle = \lambda_j$,
hiszen $k \neq j$-re $\langle b_j, b_k\rangle = 0$, és $\langle b_j, b_j\rangle = \|b_j\|^2 = 1$. $\square$

Ortonormált rendszer független

F8.1.2. Feladat
Nem nulla vektorokból álló ortogonális rendszer független.

Bizonyítás
Legyen $v_1, \dots, v_m$ ilyen rendszer és $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$. A v_j-vel skalárisan szorozva $0 = \sum_{k=1}^m \lambda_k \langle v_k, v_j\rangle = \lambda_j \langle v_j, v_j\rangle$, hiszen $k \neq j$-re $\langle v_k, v_j\rangle = 0$ az ortogonalitás miatt. Mivel $v_j \neq 0$, ezért $\langle v_j, v_j\rangle \neq 0$, és így $\lambda_j = 0$. $\square$

Így minden $\dim V$ elemszámú ortonormált rendszer bázis.

Tétel (Gram–Schmidt-ortogonalizáció)
Minden ortonormált rendszer kibővíthető ortonormált bázissá. Speciálisan minden euklideszi térben van ortonormált bázis.

A Gram–Schmidt-módszer

Gram–Schmidt-ortogonalizáció (Freud, 202. oldal)
Tegyük föl, hogy $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált rendszer,
és a v vektor nincs benne a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altérben.
Legyen $w = v - \langle b_1, v\rangle b_1 - \ldots - \langle b_m, v\rangle b_m$,
ekkor w ortogonális $b_1, \ldots, b_m$ mindegyikére (HF).
Így ha $b_{m+1} = w/\|w\|$, akkor $b_1, \ldots, b_{m+1}$ ortonormált.
Ilyenkor $\|w\|$ a v pont ***távolsága*** a $\langle b_1, \ldots, b_m\rangle$ altértől.

Állítás
Ha $b_1, \ldots, b_k$ ortonormált bázis, akkor a hozzá tartozó skaláris szorzat ugyanaz, mint a tér eredeti skaláris szorzata. Vagyis minden skaláris szorzat tényleg bázisból származik.

Valóban: ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w\rangle = \sum_{j,k} \lambda_j \mu_k \langle b_j, b_k\rangle = \sum_j \lambda_j \mu_j$. $\square$

Példa a Gram–Schmidt-módszerre

Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ azokból a vektorokból, melyek koordinátáinak összege nulla. (Tipográfiai okokból sorvektorokat írunk.) Egészítsük ki a
$b_1 = (1/\sqrt{2})(1, -1, 0, 0) \in W$ és $b_2 = (1/\sqrt{2})(0, 0, 1, -1) \in W$ ortonormált rendszert W egy ortonormált bázisává, majd ezt az $\mathbb{R}^4$ egy ortonormált bázisává.

Legyen $v = (1, 0, 0, -1)$, ekkor $\langle b_1, v\rangle = 1/\sqrt{2}$ és $\langle b_2, v\rangle = 1/\sqrt{2}$,
ezért $w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - (1/\sqrt{2})b_2 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Mivel ennek hossza 1, ezért $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$.
Legyen most $v = (1, 0, 0, 0)$, ekkor
$w = v - (1/\sqrt{2})b_1 - 0 \cdot b_2 - (1/2)b_3 = (1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$.
Ennek hossza $\sqrt{4 \cdot (1/4)^2} = 1/2$, ezért $b_4 = w/(1/2) \ = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$.

3. Transzformáció adjungáltja

Komplex euklideszi tér (Freud, 8.3. szakasz)

Legyen V vektortér $\mathbb{C}$ *fölött* és $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,
akkor $\langle v, w \rangle = \overline{\lambda_1}\mu_1 + \ldots + \overline{\lambda_n}\mu_n$ e *bázishoz tartozó skaláris szorzat.*
$\langle v, w \rangle = [v]^*_{\mathbf{b}}[w]_{\mathbf{b}}$, ahol $[v]^*$ a $[v]$ *transzponált konjugáltja.*
A kétváltozós $(v, w) \mapsto \langle v, w \rangle \in \mathbb{C}$ függvény *skaláris szorzat*,
ha tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda \in \mathbb{C}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$.

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \overline{\lambda}\langle v, w \rangle$.

(3) $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$.

(4) $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda\langle w, v \rangle$.

(5) $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ (*Hermite-féle*).

(6) $\langle v, v \rangle \geq 0$ és $\langle v, v \rangle = 0 \iff v = 0$ (*pozitív definit*).

Szöget nem definiálunk. A többi eddigi működik $\mathbb{C}$ fölött is.

Transzformáció mátrixa

Állítás
Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Ekkor a $v \in V$ vektor i-edik koordinátája a $b_1, \ldots, b_n$ bázisban $\langle b_i, v \rangle$, továbbá $[A]_{\mathbf{b}} = \big((\langle b_i, A(b_j) \rangle)\big)$ (vagyis az i-edik sor j-edik eleme $\langle b_i, A(b_j) \rangle$).

Bizonyítás
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor komplex felett is igaz, hogy b_i-vel *balról* skalárisan szorozva $\lambda_i = \langle b_i, v \rangle$, mert a skaláris szorzat a *második* tényezőben lineáris.
Ha az A mátrixában az i-edik sor j-edik eleme λ_{ij},
akkor $A(b_j) = \lambda_{1j} b_1 + \ldots + \lambda_{nj} b_n$. $\square$

Komplex fölött fontos a tényezők sorrendje a skaláris szorzatban!

Adjungált transzformáció

Definíció
Legyen V euklideszi tér, $b_1, \ldots, b_n$ ONB és $A, B \in \mathrm{Hom}(V)$.
Azt mondjuk, hogy B az A *adjungáltja*, ha $[A]_{\mathbf{b}}$ és $[B]_{\mathbf{b}}$
$\mathbb{R}$ fölötti tér esetében egymás transzponáltjai;
$\mathbb{C}$ fölötti tér esetében egymás transzponált konjugáltjai.

Megjegyzés: valós fölött minden skalár konjugáltja önmaga, ezért a $\mathbb{C}$ fölötti definíció jó $\mathbb{R}$ fölött is.

Tétel (F8.4.1. és F8.4.2. Tétel)
A és B egymást egyértelműen meghatározza. Pontosan akkor adjungáltak, ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden $v, w \in V$-re.

Az (egyértelműen meghatározott) B jele A^*. Az M *mátrix adjungáltja* a transzponált konjugáltja, jele M^*.

Az adjungált jellemzésének bizonyítása

Bizonyítás
Tetszőleges A, B mátrixokra $(AB)^T = B^T A^T$, így $(AB)^* = B^* A^*$. Láttuk, hogy $\langle v, w\rangle = [v]^*[w]$ tetszőleges ONB-ben. Ezért ha $[A] = [B]^*$, akkor
$\langle B(v), w\rangle = [B(v)]^*[w] = ([B][v])^*[w] = ([v]^*[B]^*)[w] =$
$= ([v]^*[A])[w] = [v]^*([A][w]) = [v]^*[A(w)] = \langle v, A(w)\rangle$.
Itt kihasználtuk, hogy a mátrixok szorzása asszociatív.

Megfordítás: Jelölje $b_1, \ldots, b_n$ az ONB-t. Ha $\langle B(v), w\rangle = \langle v, A(w)\rangle$ minden v, w-re, akkor $\langle B(b_i), b_j\rangle = \langle b_i, A(b_j)\rangle$ minden i, j-re. Mivel $\langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$, ezért $\overline{\langle b_j, B(b_i)\rangle} = \langle b_i, A(b_j)\rangle$.
Tudjuk, hogy $[A] = \big((\langle b_i, A(b_j)\rangle)\big)$ és $[B] = \big((\langle b_i, B(b_j)\rangle)\big)$.
Transzponáláskor az indexek megcserélődnek, ezért $[B]^* = [A]$. $\square$

4. Egybevágósági transzformációk

Szép alak ortonormált bázisban
Emlékeztető (F6.6.4 Tétel): Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas bázisban *Jordan-alakú.* Ez *speciális* felső háromszögmátrix.

Tétel (F8.5.15. Feladat)
Komplex fölött minden transzformáció mátrixa alkalmas *ortonormált* bázisban felső háromszögmátrix.

Emlékeztető (F6.6.1 Feladat): Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható (a bázisra nincs megkötés), ha a minimálpolinomjának minden gyöke egyszeres.

Tétel (F8.5.2. Tétel)
Komplex fölött az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható *ortonormált* bázisban, ha $AA^* = A^*A$ (*normális* transzformáció).

Egybevágósági transzformációk

F8.5.6. Tétel
V euklideszi tér, $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Ekvivalensek:

(1) A^* inverze A-nak.

(2) A *skalárszorzattartó*, azaz $(\forall u, v)\ \ \langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.

(3) A *normatartó*, azaz $(\forall u)\ \ \|Au\| = \|u\|$.

(4) A *távolságtartó*, azaz $(\forall u, v)\ \ \|Au - Av\| = \|u - v\|$.

(5) A minden ONB-t ONB-be visz.

(6) Minden $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(7) A alkalmas ONB-t ONB-be visz.

(8) Alkalmas $\mathbf{b}$ ONB-ben $[A]_{\mathbf{b}}$ inverze $[A]_{\mathbf{b}}^*$.

(9) A normális, és sajátértékei 1 abszolút értékűek.

Elnevezés: Valósban *ortogonális*, komplexben *unitér*.

Egybevágósági transzformációk: bizonyítás

(1) $\Longrightarrow$ (6) $\Longrightarrow$ (8) $\Longrightarrow$ (1) és (2) $\Longrightarrow$ (3) $\Longleftrightarrow$ (4) triviális.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Ha $A^*A = I$, akkor $\langle u, v\rangle = \langle u, A^*Av\rangle = \langle Au, Av\rangle$.
(3) $\Longrightarrow$ (2): $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|u+\lambda v\|^2 = \langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle$.
$\langle u+\lambda v, u+\lambda v\rangle = \langle u, u\rangle + \lambda\langle u, v\rangle + \overline{\lambda}\langle v, u\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle v, v\rangle =$
$= \|u\|^2 + |\lambda|^2\|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$, hiszen $\langle v, u\rangle = \overline{\langle u, v\rangle}$,
és $\|A(u+\lambda v)\|^2 = \|Au\|^2 + |\lambda|^2\|Av\|^2 + 2\,\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle)$.
Innen $\mathrm{Re}(\lambda\langle Au, Av\rangle) = \mathrm{Re}(\lambda\langle u, v\rangle)$ minden $\lambda \in \mathbb{C}$-re.
Ezt $\lambda = 1$-re és $\lambda = i$-re alkalmazva $\langle Au, Av\rangle = \langle u, v\rangle$.
(2) $\Longrightarrow$ (5): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle = 1$, ha $j = k$, 0 egyébként.
(5) $\Longrightarrow$ (7): triviális. (7) $\Longrightarrow$ (8): $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, A^*Ab_k\rangle$, tudjuk, hogy ezek $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ elemei. De $\langle Ab_j, Ab_k\rangle = \langle b_j, b_k\rangle$, és mivel $b_1, \dots, b_n$ ONB, ezért $[A^*A]_{\mathbf{b}}$ az egységmátrix.
(1) $\Longleftrightarrow$ (9): Ha $\mathbf{b}$ ONB és $[A]_{\mathbf{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A^{-1}]$ azt jelenti, hogy minden sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda^{-1}$, azaz $|\lambda| = 1$.
A felcserélhető az inverzével, így $A^* = A^{-1} \implies A$ normális.

Egybevágósági transzformációk: megjegyzések

Az előző tétel szerint egy bázistranszformáció akkor és csak akkor visz ortonormált bázist ortonormált bázisba, ha az áttérés mátrixa unitér, illetve ortogonális. Speciálisan minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrixhoz van olyan unitér $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$, hogy $U^{-1}MU$ felső háromszögmátrix.

A normalitás valós mátrix esetében azt jelenti, hogy felcserélhető a transzponáltjával. Ebből azonban csak az következik, hogy *komplex* fölött van ortonormált sajátbázisa.

Egy valós mátrix akkor ortogonális, ha a transzponáltja az inverze, azaz ha komplex fölött ONB-ben diagonalizálható, és minden komplex sajátérték abszolút értéke 1. Mi a legszebb alakja *valós* fölött?

Ortogonális transzformációk

F8.6.4. Tétel
Egy valós euklideszi téren ható A lineáris transzformáció pontosan akkor ortogonális, ha van olyan ortonormált bázis, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, ahol minden blokk vagy 1×1-es, és az eleme ± 1, vagy $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ alakú alkalmas $\alpha \in \mathbb{R}$-re.

Vagyis minden sokdimenziós egybevágóság síkbeli forgatásokra, valamint „tükrözésekre” „bontható”.
A bizonyítás ötlete: A karakterisztikus polinom valós együtthatós, így a sajátértékek konjugált párok, vagy ± 1.
Az A mátrixa ONB-ben M. Ha $Mv = \lambda v$, akkor $M\overline{v} = \overline{\lambda}\overline{v}$.
Legyen $b_1 = (v+\overline{v})/\sqrt{2}$ és $b_2 = -i(v-\overline{v})/\sqrt{2}$. Ekkor b_1 és b_2 valós, ortonormált, és ebben a kételemű bázisban A mátrixa a fenti forgatás.

5. Összefoglaló

A 7. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Absztrakt és bázishoz tartozó skaláris szorzat $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ fölött, euklideszi tér. Hossz, távolság, szög, ortogonalitás. Ortogonális, ortonormált vektorrendszer és bázis. Adjungált; normális, unitér, ortogonális transzformáció.

Tételek
A CBS-egyenlőtlenség, a háromszög-egyenlőtlenség, egyenlőség. Vektor koordinátái, transzformáció mátrixa ortonormált bázisban. Ortogonális rendszer független. Gram–Schmidt-ortogonalizáció, minden ortogonális rendszer kibővíthető ONB-vé. Az adjungált jellemzése skaláris szorzattal. A diagonalizálhatóság jellemzése ONB-ben $\mathbb{C}$ fölött. Komplex feletti transzformáció alkalmas ONB-ben háromszögmátrix. Az egybevágósági transzformációk jellemzései. Ortogonális transzformáció blokkfelbontása.