1. A diagonalizálhatóság feltétele

Diagonalizálható transzformációk
Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)
Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és *minden gyöke egyszeres.*

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)
Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan *ortonormált* bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa *szimmetrikus*, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából *mindegy*, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az. A főtengelytételt a 9. előadáson bizonyítjuk.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás
Transzformáció minimálpolinomja megegyezik a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik. Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei).

A megfordítás kulcsa az F6.6.2. Tétel (nem bizonyítjuk). Az ebben szereplő direkt összegről a 9. előadáson lesz szó.

2. A Jordan-féle normálalak

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa
$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$, $\quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:
$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

A geometriai multiplicitás kisebb, így M *nem diagonalizálható.*

Szebb alak

A példa folytatása
$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$, $\quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}$, $\quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.
Ez nem diagonális, de ***tudjuk hatványozni!***

<u>HF</u> (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:
$M^k = \begin{bmatrix} 2^k - 2k2^{k-1} & -4k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + 2k2^{k-1} \end{bmatrix}$.

Jordan-blokk

Definíció
Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó *Jordan-blokk*:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből
N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1, másutt 0. Speciálisan $N^j = 0$, ha $j \geq m$.

Jordan-normálalak

Definíció
Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix *Jordan-alakú*, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)
Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott *Jordan-féle normálalak* azonban *egyértelmű*: csak a blokkok *sorrendje* változhat. Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban *hány darab* $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon. Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma. A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist. *Haszna:* van képlet a Jordan-alak hatványozására (később).

Minimálpolinom és Jordan-alak

Tétel
Az M mátrix minimálpolinomjában az $(x-\lambda)$ gyöktényező kitevője a *legnagyobb* λ-hoz tartozó Jordan-blokk mérete.

Például

$$M = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

minimálpolinomja $m_M(x) = (x-2)(x-3)(x-1)^3x^2$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$. Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$. Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek. Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el. Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van. Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad N : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első két mátrix hasonló, a blokkok sorrendjében különböznek.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \text{ (A felső blokk } 90°\text{-os forgatás!)}$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás
$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás
$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE *felcserélhető*, mert $N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a *binomiális tétel*:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$. Használjuk föl N^j ismert szerkezetét. □

3. Leképezés és mátrix rangja

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció
$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ *rangja* a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix *oszloprangja* az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M *sorrangja* a soraiból álló vektorrendszer rangja.

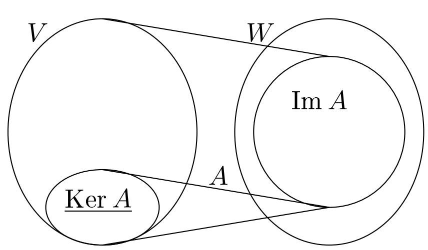
F3.4.2. Tétel (Biz.: Algebra és Számelmélet, 18. dia)
Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a *mátrix rangja*, jele $r(M)$.

Tétel (F5.7.11. Feladat)
Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

4. Rangra vonatkozó egyenlőtlenségek

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\Longrightarrow\ r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

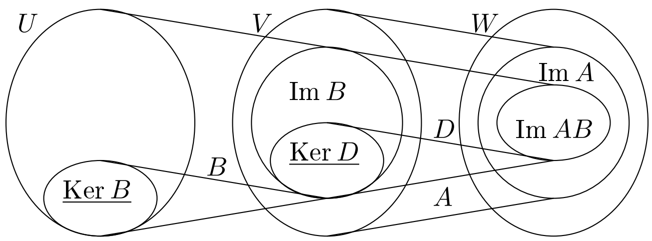
$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\Longrightarrow\ r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata
$r(A+B) = \dim \mathrm{Im}(A+B)$. HF: $\mathrm{Im}(A+B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,
mert $\dim(U+V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. □

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás
Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\, D + \dim \mathrm{Ker}\, D = \dim \mathrm{Im}\, B$.
Így $r(AB) = r(D) = \dim \mathrm{Im}\, D \leq \dim \mathrm{Im}\, B = r(B)$. □

5. Számok minimálpolinomja

Algebrai és transzcendens számok
Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ *algebrai szám*, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám *transzcendens*.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel
Egy α algebrai szám m_α *minimálpolinomja* a legalacsonyabb fokú (egyértelmű-en meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke. Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:
Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(\alpha) = m(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = 0q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$.
Azaz $f(\alpha) = 0 \iff r(\alpha) = 0$. De m a *legkisebb* fokú polinom,
melynek α gyöke. Ezért $r(\alpha) = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. □

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel
Algebrai szám minimálpolinomja *irreducibilis* $\mathbb{Q}$ fölött.
Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás
Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$. Mivel $\mathbb{C}$ *nullosztómentes*, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$. Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese. Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.
Megfordítva: Ha $f(\alpha) = 0$ és f normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $m_\alpha \mid f$ miatt m_α nem nulla konstans, vagy f egységszerese. De m_α nem konstans, mert $m_\alpha(\alpha) = 0$. Ezért $m_\alpha = f$, mert mindkettő normált. □

Mátrix minimálpolinomja nem mindig irreducibilis, láttunk példákat.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$, mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^n - 2$, ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^2 - 27$. Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

(4) A $\sqrt[3]{9}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^3 - 9$. Ez irreducibilis, mert harmadfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban. Ismétlés: racionális gyökteszt!

(5) Tudjuk, hogy $1 + i$ negyedik hatványa -4. A minimálpolinomja mégsem $x^4 + 4$, hanem $x^2 - 2x + 2$.

(6) Az *n-edik primitív egységgyökök* közös minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött a $\Phi_n(x)$ (n-edik *körosztási* polinom).

6. Összefoglaló

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek
Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel. A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége. A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról. Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása. Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő. A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja. Szám minimálpolinomja osztója azoknak a polinomoknak, melyeknek a szám gyöke. Szám minimálpolinomjának felismerése irreducibilitás segítségével.