1. Diagonalizálás

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés
Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N *hasonló*, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban. Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ *diagonalizálható,* ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális. A diagonalizálható $\iff$ van sajátvektorokból álló bázis.

Definíció
Az M mátrix *diagonalizálható*, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.
<u>Ekvivalens:</u> M egy diagonalizálható transzformáció mátrixa.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2}\begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M *diagonalizáltja* (főátlóban sajátértékek).

Vagyis M-et bázistranszformációval diagonális alakra hoztuk.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel
Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix *diagonalizálható*.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont *nem diagonalizálható*. Mert: ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff y = 0.$$

Az $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ alakú vektorok között nincs két független (azaz bázis).

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)
Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok *lineárisan függetlenek*.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás
$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_k$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$.
Mivel $v_1 \neq 0$ (hiszen sajátvektor), a fenti egyenletből $\mu_1 = 0$. $\square$

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció
Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak). A λ *algebrai multiplicitása* k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának.
A λ *geometriai multiplicitása* m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)
A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.
A transzformáció *pontosan akkor diagonalizálható,* ha a kar. polinom gyöktényezőkre bomlik (a skalárok testében), és a kétféle multiplicitás minden sajátérték esetében egyenlő.

Példa: $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ esetében az egyetlen $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1 (a sajátalteret $[1, 0]^T$ generálja) az algebrai 2, mert $k_M(x) = (x-2)^2$.

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok" független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n\times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben, akkor minden algebrai és geometriai multiplicitás 1, azaz M diagonalizálható (így e tétel erősebb az imént belátottnál).

Algoritmus a diagonalizálhatóság eldöntésére
Az algebrai multiplicitások a karakterisztikus polinomról leolvashatóak (ki kell tudjuk számolni a gyökeit).
A geometriai multiplicitás a sajátvektorok kiszámításához felírt lineáris egyenletrendszerben a szabad változók száma.

2. Behelyettesítés polinomba

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)
Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0E + a_1M + \ldots + a_mM^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_mA^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa
$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.
A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A - 2I = 0$.
($[A] = N$ tetszőleges bázisban.)

Példák behelyettesítésre

Példa
$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$
$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Diagonális mátrix behelyettesítése (<u>HF</u>)

$$D=\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \dots & 0\\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n\end{bmatrix} \Longrightarrow f(D)=\begin{bmatrix}f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0\\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n)\end{bmatrix}.$$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás
Ha $f,g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M)=f(M)+g(M)$ és $(fg)(M)=f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás
Legyen $f(x)=ax^2+bx+c$ és $g(x)=ux^2+vx$.
$(fg)(x)=aux^4+(av+bu)x^3+(bv+cu)x^2+cvx$.
$(fg)(M)=auM^4+(av+bu)M^3+(bv+cu)M^2+cvM$.
$f(M)=aM^2+bM+cE$ és $g(M)=uM^2+vM$. Így $f(M)g(M)=$
$=aM^2uM^2+aM^2vM+bMuM^2+bMvM+cEuM^2+cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2=auM^4$, $cEvM=cvM$. De miért lesz
$aM^2vM+bMuM^2=(av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M=MM^2$?
Az *asszociativitás miatt!* <u>HF:</u> $M^nM^k=M^kM^n$ ha $n,k\geq 0$
(itt $M^0=E$). Vagyis M *hatványai felcserélhetők.* $\square$

3. A minimálpolinom

Polinom gyöke

Következmény
Ha $f \mid g$ és $f(M)=0$, akkor $g(M)=0$.

Definíció
M (vagy A) *gyöke* f-nek, ha $f(M)=0$ (illetve $f(A)=0$).

Példa
Az $N=\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?
Az $x-2$ többszöröseinek biztosan. *Másnak nem!*
Ha $g(N)=0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x-2$-vel:
$g(x)=(x-2)h(x)+c$ (ahol c skalár). Innen
$0=g(N)=(N-2E)h(N)+cE=0h(N)+cE=cE$. Azaz $c=0$, tehát $x-2\mid g$.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)
Minden $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz
egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy,
hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció
Az m_M az M mátrix *minimálpolinomja*. Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is. Ekkor a minimálpolinom jele m_A.

Példa
Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $x - 2$.

A minimálpolinomra vonatkozó tételek
m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás
A minimálpolinom a *legalacsonyabb fokú* olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel
Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények
A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek. A minimálpolinom a karakterisztikus polinom osztói között a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek a mátrix gyöke.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis *elsőfokú* minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

Következmény
Ha egy kétszer kettes mátrix nem cE alakú, akkor minimálpolinomja ugyanaz, mint a karakterisztikus polinomja. □

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás
Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de *mindegyik csak egyszer felsorolva*. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás
$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.
$m(D) = 0$ (<u>HF</u>), de $(x-1)(x-2) \mid m_D(x)$, mert 1, 2 sajátérték. □

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $(x-2)^2$ (*van kétszeres gyöke!*).

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$. A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3. Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke. Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható. Mivel $M^2 = 0$, de $M \neq 0$, ezért M minimálpolinomja x^2, hiszen ez a legalacsonyabb fokú, amelyiknek gyöke a mátrix. Mivel $N^2 \neq 0$, ezért N minimálpolinomja x^3. Azt nem kell ellenőrizni, hogy x^3-nek gyöke N, mert ez következik a Cayley–Hamilton-tételből.

4. Bizonyítások

Létezik a minimálpolinom

Állítás
Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor *van* olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a *legkisebb* fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat
$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$,
és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla,
hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$.
Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$.
Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$. De m a *legkisebb* fokú polinom,
melynek M gyöke. Ezért $r(M) = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. □

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)
Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$. Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás
Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda) v$.
Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$, és mivel $v \neq 0$, ezért $f(\lambda) = 0$. □

Minden gyök sajátérték

Állítás
A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak. Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték. A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás
A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$. Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$. Mivel k_M gyökei az M sajátértékei, ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek. Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$. □

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk. A bizonyításához újabb eszközök kellenek. Lásd Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.7.6. Tétel.

5. Véges Markov-folyamatok

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell
Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95 a_n + 0{,}1 b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05 a_n + 0{,}9 b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:
$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$. Ha $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$ és $v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$,
akkor $v_{n+1} = M v_n$, tehát $v_n = M^n v_0$. Vagyis a feladat az M mátrix hatványainak a kiszámítása. Ehhez *diagonalizáljuk* az M mátrixot.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$

Sajátértékek: 1 és 0,85, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De *diagonális mátrixot könnyű hatványozni*: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 0{,}85^n & 2 - 2 \cdot 0{,}85^n \\ 1 - 0{,}85^n & 1 + 2 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$v_0 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$, így $v_n = M^n v_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 - 0{,}8 \cdot 0{,}85^n \\ 1 + 0{,}8 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis
hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.
<u>HF:</u> Ez *nem függ a kiinduló eloszlástól* (a 60%-tól)!!

Év	autózó	tömegközlekedő
0	40%	60%
1	44%	56%
2	47%	53%
5	55%	45%
10	61%	39%
20	66%	34%

Az eredeti föltevések fiktívek!

6. Összefoglaló

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek
Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek. $M \in T^{n\times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\implies$ M diagonalizálható. $(\forall\lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\iff$ M diagonalizálható. A minimálpolinom létezik, és $(\forall f)\big(f(M) = 0 \iff m_M \mid f\big)$. Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, ezzel ekvivalens: $m_M \mid k_M$. A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek. A minimálpolinom akkor elsőfokú, ha a transzformáció nyújtás. Diagonális mátrix minimálpolinomja (és sajátértékei).