

1. Lineáris leképezések

A lineáris leképezés fogalma

Definíció (F5.1.1. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek $UGYANAZON T$ test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ *lineáris leképezés*, ha

összegtartó, azaz $v_1, v_2 \in V$ esetén $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$;

skalárszorostartó, azaz $v \in V$ és $\lambda \in T$ esetén $A(\lambda v) = \lambda A(v)$.

Az $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezések halmaza $\text{Hom}(V, W)$.

Állítás (F5.1.2. Tétel)

Minden lineáris leképezés nullát nullába, ellentettet ellentettbe visz,

azaz $A(0_V) = 0_W$ és $A(-v) = -A(v)$.

Bizonyítási ötlet az első állításra

$A(0_V) = A(0_V + 0_V) = A(0_V) + A(0_V)$, adjunk hozzá $-A(0_V)$ -t. □

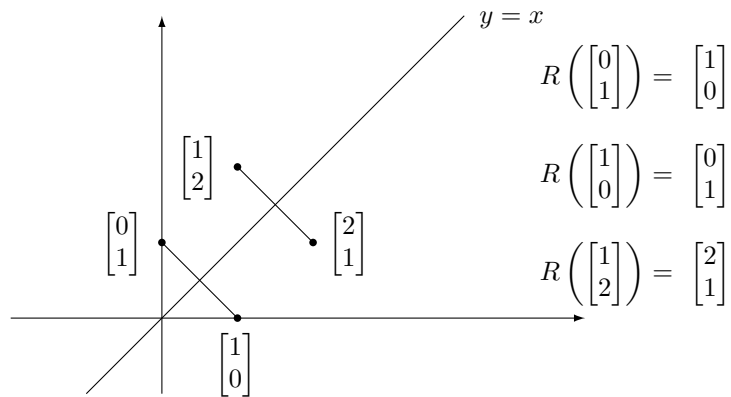
Példák lineáris leképezésre

- (1) A sík és a tér origót fixáló *egybevágósági* és *hasonlósági* transzformációi (tükrözés, forgatás, nyújtás).
- (2) $V = T^n$ és $W = T^m$ a T fölött, $M \in T^{m \times n}$ rögzített mátrix.
Legyen $A(v) = Mv$. Azaz A az M -mel szorzás.
- (3) $V = W = T[x]$ a T fölött, $A(p) = p'$ (a p polinom deriváltja).
- (4) $V = \mathbb{R}[x]$ az \mathbb{R} fölött, $W = \mathbb{R}$ önmaga fölött.
 $A(p) = p(3)$ (az 3 szám behelyettesítése).
- (5) V vektortér T fölött, $W = T^n$ a T test fölött.
 $B = (b_1, \dots, b_n)$ rögzített bázis V -ben és $A(v) = [v]_B$.
- (6) V és W tetszőleges vektorterek T fölött, $A(v) = 0_W$ minden $v \in V$ -re.
Ez a *nulla leképezés*, jele 0 .
- (7) $V = W$ tetszőleges vektortér, $A(v) = v$.
Ez az *identikus leképezés*, jele I vagy I_V .

Tükrözés egyenesre

Példa

Legyen R az $y = x$ egyenesre való tükrözés.



A tükrözés képlete

Kérdés

Legyen R az $y = x$ egyenesre való tükrözés. $R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = ?$

Láttuk: $R \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ és $R \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Ezért

$$R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = R \left(\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix} \right) = R \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} + R \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix},$$

hiszen R *összegtartó*. A *skalárszoros-tartás* miatt ez

$$\begin{aligned} R \left(x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) &= xR \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yR \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \\ &= x \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vektor képe általános transzformációnál

Kérdés

Legyen $A : T^2 \rightarrow T^2$ lineáris transzformáció.

Ha $A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ és $A \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}$, akkor $A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = ?$

$$A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right) = A \left(\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left(\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \right),$$

hiszen A összegetartó. A skalárszoros-tartás miatt ez

$$\begin{aligned} A \left(x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + A \left(y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) &= xA \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) + yA \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \\ &= x \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax \\ bx \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} cy \\ dy \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Tehát minden vektor képét ki tudjuk számolni, ha ismerjük a, b, c, d értékét.

Lineáris transzformáció mátrixa

Láttuk

Legyen $A : T^2 \rightarrow T^2$ lineáris transzformáció. Ha

$$A \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \text{ és } A \left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}, \text{ akkor } A \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix}.$$

Definíció

A fenti A mátrixa $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$. (Az oszlopok $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ képei.)

A mátrix-vektor szorzás definíciójának indoka:

$$\begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ax + cy \\ bx + dy \end{bmatrix} \text{ (így lehet kiszámolni egy vektor képét).}$$

Azaz $A(v) = [A]v$.

A forgatás mátrixa

Példa

$$\text{Az origó körüli } \alpha \text{ szögű forgatás mátrixa } [F] = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

A megfelelő derékszögű háromszögek lerajzolásával: HF.

Komplex számokkal: ez a forgatás szorzás $\cos \alpha + i \sin \alpha$ -val.

$$\text{Az } x + iy \text{ számnak az } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ felel meg: } \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \leftrightarrow 1 \text{ és } \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \leftrightarrow i.$$

$$\text{A } [F] \text{ első oszlopa: } 1(\cos \alpha + i \sin \alpha) \leftrightarrow \begin{bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{bmatrix}.$$

$$\text{A második: } i(\cos \alpha + i \sin \alpha) = -\sin \alpha + i \cos \alpha \leftrightarrow \begin{bmatrix} -\sin \alpha \\ \cos \alpha \end{bmatrix}.$$

Mátrix bázispárban

Definíció (F5.7.1. Definíció)

$\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$ bázis V -ben, $\mathbf{d} = (d_1, \dots, d_m)$ bázis W -ben.

Ha $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezés, akkor A mátrixa a (\mathbf{b}, \mathbf{d}) bázispárban

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \left[[A(b_1)]_{\mathbf{d}}, \dots, [A(b_n)]_{\mathbf{d}} \right] \in T^{m \times n}.$$

A mátrix j -edik oszlopába $A(b_j)$ koordinátáit írjuk a \mathbf{d} bázisban.

$$\text{Azaz } [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \text{ azt jelenti, hogy}$$

$$A(b_1) = \lambda_{11}d_1 + \dots + \lambda_{m1}d_m, \dots, A(b_n) = \lambda_{1n}d_1 + \dots + \lambda_{mn}d_m.$$

Az előbbi példákban a sík szokásos bázisa szerepelt.

Vektor képének kiszámítása

Tétel (F5.7.3. Tétel)

Legyen \mathbf{b} bázis V -ben, \mathbf{d} bázis W -ben, $A \in \text{Hom}(V, W)$ és $v \in V$.

Ekkor $[A(v)]_{\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})\mathbf{b}$ („kiesik” a \mathbf{b}).

Bizonyítás

Legyen $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = ((\lambda_{ij}))$ és $[v]_{\mathbf{b}} = ((\mu_j))$. Ekkor

$$[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_{m1} & \dots & \lambda_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n \\ \vdots \\ \lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n \end{bmatrix}$$

Tudjuk: $A(v) = A(\mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n) = \mu_1 A(b_1) + \dots + \mu_n A(b_n)$,
és $A(b_j) = \lambda_{1j}d_1 + \dots + \lambda_{mj}d_m$. Behelyettesítve és átrendezve

$$A(v) = (\lambda_{11}\mu_1 + \dots + \lambda_{1n}\mu_n)d_1 + \dots + (\lambda_{m1}\mu_1 + \dots + \lambda_{mn}\mu_n)d_m. \quad \square$$

2. Lineáris leképezések szorzata

Példa kompozícióra

Kérdés

Melyik transzformációt kapjuk, ha először tükrözünk az $y = x$ egyenesre, majd forgatunk az origó körül 90° -kal? Ez a két transzformáció *kompozíciója* (egymás utánja).

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \mapsto R \left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}.$$

Mivel $[F] = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, ezért $\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$ képe

$$F \left(\begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0y + (-1)x \\ 1y + 0x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}.$$

Az eredmény az y -tengelyre való tükrözés (HF).

A kompozíció mátrixa

Definíció

Ha $A, B : T^2 \rightarrow T^2$ transzformációk, akkor *kompozíciójuk* $(A \circ B)(v) = A(B(v))$ tetszőleges $v \in T^2$ esetén.

Összetett függvény: először B -t, utána A -t alkalmazzuk.

Tétel

Ha $[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$, és $[B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix}$, akkor

$$[A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Tehát $[A \circ B] = [A][B]$: *kompozíció mátrixa a mátrixok szorzata.*

A mátrixok szorzását azért definiáltuk ezekkel a képletekkel, hogy ez az összefüggés igaz legyen.

A kompozíció mátrixának kiszámítása

Tétel

$$[A] = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} a' & c' \\ b' & d' \end{bmatrix} \implies [A \circ B] = \begin{bmatrix} aa' + cb' & ac' + cd' \\ ba' + db' & bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$$A \left(B \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right) = A \left(\begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a' \\ b' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' + cb' \\ ba' + db' \end{bmatrix}.$$

Ezért $A \circ B$ első oszlopa tényleg az, ami a tételben szerepel.

$$A \left(B \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right) = A \left(\begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c' \\ d' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ac' + cd' \\ bc' + dd' \end{bmatrix}.$$

Ezért $A \circ B$ második oszlopa is megfelelő. \square

Példa: $[F \circ R] = [F][R] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$

Kompozíció az általános esetben

Definíció (F5.6.1. Definíció)

Legyenek U , V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az $A : V \rightarrow W$ és a $B : U \rightarrow V$ lineáris leképezések *szorzata* (kompozíciója)

$(AB)(u) = A(B(u))$ minden $u \in U$ -ra.

Tétel (F5.6.2. Tétel)

Ha A és B lineáris, akkor AB is az.

Bizonyítás

AB skalárszoros-tartó:

$$AB(\lambda u) = A(B(\lambda u)) = A(\lambda B(u)) = \lambda A(B(u)) = \lambda AB(u). \quad \square$$

A kompozíció definíciója miatt.

B skalárszoros-tartása miatt.

A skalárszoros-tartása miatt.

A kompozíció definíciója miatt.

HF: AB összegtartó.

Általános kompozíció mátrixa

Tétel (F5.7.6. Tétel)

Legyen \mathbf{a} bázis U -ban, \mathbf{b} bázis V -ben, \mathbf{d} bázis W -ben,

$A \in \text{Hom}(V, W)$ és $B \in \text{Hom}(U, V)$. Ekkor $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{a}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[B]_{\mathbf{b}/\mathbf{a}}$.

Bizonyítás: HF.

Bázisok megjegyzése: $\mathbf{d}/\mathbf{a} = (\mathbf{d}/\mathbf{b})(\mathbf{b}/\mathbf{a})$ („kiesik” a \mathbf{b}).

Következmény

Inverz leképezés mátrixa a mátrix inverze: $[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}^{-1}$.

Bizonyítás

$[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A^{-1}A]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}} = [I]_{\mathbf{b}/\mathbf{b}}$, ami az egységmátrix.

Hasonlóan $[A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}[A^{-1}]_{\mathbf{b}/\mathbf{d}}$ is az egységmátrix. □

3. Leképezések összege és skalárszorosa

Pontonkénti műveletek

Definíció (F5.5.1. és F5.5.2. Definíció)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött,
 $A, B : V \rightarrow W$ lineáris leképezések és $\lambda \in T$.

(1) A és B összege $(A + B)(v) = A(v) + B(v)$ minden $v \in V$ -re.

(2) A λ -szorosa $(\lambda A)(v) = \lambda(A(v))$ minden $v \in V$ -re.

Tétel (F5.5.3. Tétel)

$A + B$ és λA is lineáris transzformáció.

Mintabizonyítás: λA összegtartó

$$\begin{aligned}(\lambda A)(u + v) &= \lambda(A(u + v)) = \lambda(A(u) + A(v)) = \\ &= \lambda(A(u)) + \lambda(A(v)) = (\lambda A)(u) + (\lambda A)(v).\end{aligned}$$

□

A λA definíciója miatt.

Az A összegtartása miatt.

A skalárral szorzás tulajdonsága (vektortéraxióma) miatt.

A λA definíciója miatt (kétszer alkalmazva).

A másik három állítás bizonyítása HF.

Az összeg mátrixa

Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített \mathbf{b} és \mathbf{d} bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés
összegtartó $\text{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Azaz összeg mátrixa a mátrixok összege.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ összegtartó W és T^m között.

Ha $A, B \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $(A + B)(b_i) = A(b_i) + B(b_i)$ az $A + B$ definíciója miatt. Így $[(A + B)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i) + B(b_i)]_{\mathbf{d}} = [A(b_i)]_{\mathbf{d}} + [B(b_i)]_{\mathbf{d}}$. Vagyis $A + B$ mátrixának oszlopai az A , illetve a B mátrixából vett megfelelő oszlopok összegei. A mátrixok összeadásának definíciója miatt tehát $[A + B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} + [B]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$. □

A skalárszoros mátrixa

Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített \mathbf{b} és \mathbf{d} bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés skalárszoros-tartó $\text{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Azaz λ -szoros mátrixa a mátrix λ -szorosa.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ skalárszorostartó W és T^m között.

Ha $A \in \text{Hom}(V, W)$, akkor $(\lambda A)(b_i) = \lambda A(b_i)$ a λA definíciója miatt. Így $[(\lambda A)(b_i)]_{\mathbf{d}} = [\lambda A(b_i)]_{\mathbf{d}} = \lambda [A(b_i)]_{\mathbf{d}}$. Vagyis λA mátrixának oszlopai az A mátrixából vett megfelelő oszlopok λ -szorosai. A mátrixok λ -szorosának definíciója miatt tehát $[\lambda A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = \lambda [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$. \square

A műveletek tulajdonságai

Jelölés

$\text{Hom}(V, V)$ rövidítve $\text{Hom}(V)$, elemei lineáris *transzformációk*.

Állítás (F5.1.3. és F5.6.3. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek ugyanazon T test fölött.

Az összeadásra és skalárral szorzásra $\text{Hom}(V, W)$ *vektortér*.

Nullelem: a nulla leképezés. Az A ellentettje: $(-A)(v) = -A(v)$.

$\text{Hom}(V)$ egységelemes *gyűrű* az összeadásra és a szorzásra,

és $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$ ($A, B \in \text{Hom}(V)$, $\lambda \in T$).

Az egységelem az identikus transzformáció.

FONTOS házi feladat önállóan kidolgozni a bizonyítást! Különösen ajánlom a két disztributív azonosság levezetését:

$$A(B + C) = AB + AC \text{ és } (B + C)A = BA + CA.$$

4. Izomorf vektorterek

Példák izomorfizmusra

Definíció (F5.2.1. Definíció)

Az $A \in \text{Hom}(V, W)$ *izomorfizmus*, ha kölcsönösen egyértelmű.

A V és W *izomorf* vektorterek, ha van közöttük izomorfizmus. Jele: $V \cong W$.

Két fontos példa

Ha V vektortér a T test fölött, és \mathbf{b} bázis V -ben, akkor $v \mapsto [v]_{\mathbf{b}}$ izomorfizmus V és T^n között. Ezért *minden V vektortér izomorf $T^{\dim(V)}$ -vel*.

Legyen \mathbf{b} bázis V -ben, \mathbf{d} bázis W -ben. Ekkor $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ izomorfizmus $\text{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között. Vagyis $\text{Hom}(V, W) \cong T^{\dim(W) \times \dim(V)}$. A művelettartást láttuk, az egyértelműséget most bebizonyítjuk.

Az előírhatósági tétel

Tétel (F5.3.1. Tétel)

Legyenek V és W vektorterek a T test fölött,
 b_1, \dots, b_n bázis V -ben, és $c_1, \dots, c_n \in W$ tetszőleges vektorok.
Ekkor pontosan egy olyan $A : V \rightarrow W$ lineáris leképezés van,
melyre $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén.

Bizonyítás: egyértelműség

Ha A megfelel a feltételeknek, akkor

$$A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = A(\lambda_1 b_1) + \dots + A(\lambda_n b_n),$$

mert A összegtartó, és ez $\lambda_1 A(b_1) + \dots + \lambda_n A(b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$,

mert A skalárszorostartó. Azaz A értékét V minden elemén ki tudjuk számítani, és így *csak egy* megfelelő A leképezés létezhet. Az egyértelműséget tehát beláttuk.

Az előírhatósági tétel: létezés

Bizonyítás: létezés

Legyen $A(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$. Ez *jóldefiniált*, mert V minden eleme egyértelműen írható fel $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ alakban.

Az A *összegtartó*, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 b_1 + \dots + \mu_n b_n$, akkor $v + w = (\lambda_1 + \mu_1) b_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) b_n$, és így

$$A(v + w) = (\lambda_1 + \mu_1) c_1 + \dots + (\lambda_n + \mu_n) c_n.$$

$$A(v) + A(w) = (\lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n) + (\mu_1 c_1 + \dots + \mu_n c_n),$$

azaz tényleg $A(v + w) = A(v) + A(w)$.

A *skalárszorostartás* bizonyítása hasonló: HF.

Mivel $b_1 = 1 \cdot b_1 + 0 \cdot b_2 + \dots + 0 \cdot b_n$,

ezért $A(b_1) = 1 \cdot c_1 + 0 \cdot c_2 + \dots + 0 \cdot c_n = c_1$.

Hasonlóan $A(b_j) = c_j$ minden $1 \leq j \leq n$ esetén. □

Mátrixok és leképezések: egyértelműség

Tétel (F5.7.4. Tétel)

Rögzített \mathbf{b} és \mathbf{d} bázisok esetén az $A \mapsto [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}}$ leképezés *izomorfizmus* $\text{Hom}(V, W)$ és $T^{m \times n}$ között.

Bizonyítás

$w \mapsto [w]_{\mathbf{d}}$ kölcsönösen egyértelmű W és T^m között, hiszen W minden eleme *egyértelműen* írható $\lambda_1 d_1 + \dots + \lambda_m d_m$ alakban. Ha $A \neq B \in \text{Hom}(V, W)$, akkor az előírhatósági tétel egyértelműségi állítása miatt $A(b_1), \dots, A(b_n)$ és $B(b_1), \dots, B(b_n)$ valahol eltér. Így a koordinátavektorok is ugyanott eltérnek, azaz A és B mátrixa különböző. Ha adott egy $M \in T^{m \times n}$ mátrix, akkor annak oszlopvektorai egy c_1, \dots, c_m vektorrendszert adnak W -ben, és az előírhatósági tételből kapott A leképezésnek M lesz a mátrixa. □

Az izomorfizmus jellemzése

Tétel (F5.2.5. Tétel)

Azonos test fölötti két, véges dimenziós vektortér akkor és csak akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik.

Következmény: $\dim(\text{Hom}(V, W)) = \dim(V) \dim(W)$.

Bizonyításvázlat

Tegyük föl, hogy V és W dimenziója egyenlő. Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben és d_1, \dots, d_n bázis W -ben. Az előírhatósági tétel miatt vannak olyan B és C lineáris leképezések, melyekre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

HF: ezek egymás inverzei, és így izomorfizmusok.

Megfordítva: ha $A : V \rightarrow W$ izomorfizmus és b_1, \dots, b_n bázis V -ben, akkor

HF: $A(b_1), \dots, A(b_n)$ bázis W -ben. Ezért a két dimenzió megegyezik. \square

5. Összefoglaló

A 3. előadáshoz tartozó vizsganyag

Fogalmak

Összegtartás, skalárszoros-tartás, linearitás.

Lineáris leképezések mátrixa, összege, λ -szorosa, szorzata. Izomorfizmus.

Tételek

Nullvektor és ellentett képe lineáris leképezésnél. Az α szögű forgatás mátrixa a sík szokásos bázisában. Vektor képének kiszámítása a leképezés mátrixának segítségével. Az összeg, λ -szoros, szorzat is lineáris; ezek mátrixa. $\text{Hom}(V, W)$ vektortér és izomorf $T^{n \times k}$ -vel. $\text{Hom}(V)$ gyűrű, és a megfeleltetés $T^{n \times n}$ -nel szorzattartó. Vektortér-izomorfia jellemzése a dimenzióval. $\text{Hom}(V, W)$ dimenziója. Az előírhatósági tétel.