1. A dimenzió

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)
$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme *egyértelműen* fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.
Ha független, akkor egyértelmű a fölírás, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen
$(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt
$\lambda_j - \mu_j = 0$, azaz $\lambda_j = \mu_j$ minden j-re (tehát egyértelmű). $\square$

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy *koordinátarendszert* vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)
Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis.
Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, akkor
$[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$ a v *koordinátavektora* ebben a bázisban.

A koordinátázás haszna
A keletkező T^n-beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti V vektortér elemeivel, amik bonyolult dolgok (például függvények, geometriai transzformációk) is lehetnek.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.
A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.
Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3+51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1+i, i)$ másik bázis, akkor $[-3+51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3+51i = -3(1+i) + 54i$.

Persze B' „ferdeszögű" koordinátarendszert ad a síkon, hiszen $1+i$ nem merőleges i-re.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához *lineáris egyenletrendszert kell megoldani.* Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész: $x+2y = 4$ és $x-y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer. Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4+i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.
Bázistranszformáció: ha egy bázist másikra cserélünk, akkor hogyan változik egy vektor koordinátavektora? Képlet: később.

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: *tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.*

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként:
$f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a
$\lambda_{1i} x_1 + \ldots + \lambda_{ni} x_n = 0$ ($1 \leq i \leq k$) lineáris egyenletrendszert.
Indirekt feltevés: $n > k$. Homogén, így lenne nemtriviális megoldás (több ismeretlen, mint egyenlet, F3.1.4. Tétel Algebra1-ből). De erre a megoldásra $x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n = 0$, ellentmondás, hiszen $f_1, \ldots, f_n$ lineárisan független. $\square$

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér *dimenziója*, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás
Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma. B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$. Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.
Legyen B egy rögzített bázis V-ben. Ekkor $|B| = \dim(V)$.
Ha F független, akkor $|F| \leq |B|$, mert B generátorrendszer.
Ha G generátorrendszer, akkor $|G| \geq |B|$, mert B független. □

2. Függés és függetlenség

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)
Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ *lineárisan összefüggő*, ha *nem* lineárisan független.
$v \in V$ *lineárisan függ* $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Nyilván $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor generátorrendszer V-ben, ha V minden vektora függ tőle.

Állítás (F4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

Az üres halmaz lineárisan független! Ezért $\dim(\{0\}) = 0$.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)
Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor *VAN közöttük olyan*, amely lineárisan függ a többiektől.

Az *nem igaz*, hogy *mindegyik* függ a többiektől! Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)
v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$, akkor $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$. □

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)
Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás
Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$. Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll). Ezért v kifejezhető, azaz függ $v_1, \ldots, v_m$-től. □

3. A bázis jellemzései

Maximális és minimális halmazok

Definíció
Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ *legnagyobb* elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ *legszűkebb* elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ *maximális* elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ *minimális* elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa
Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.
Legnagyobb elem nincs, $\{1,2,3\}$ és $\{3,4\}$ a maximális elemek.
Legszűkebb eleme van, az üres halmaz, és ez minimális is.

Ha egy elem legnagyobb, akkor maximális is, de fordítva nem.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)
A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor *bázis* a V vektortérben, ha *maximális* független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő. Tehát $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő. De $b_1, \ldots, b_n$ független, így a 2. Lemma miatt v függ $b_1, \ldots, b_n$-től. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer is. □

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)
A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor *bázis* a V vektortérben, ha *minimális* generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)
Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől. Azaz $b_1 \in \langle b_2, \ldots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq W$ (mert $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ a „legszűkebb" $\{b_1, \ldots, b_n\}$-et tartalmazó altér). De $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle = V$, és így $V \subseteq W = \langle b_2, \ldots, b_n \rangle$. Így $b_2, \ldots, b_n$ generátorrendszer, ami ellentmond $b_1, \ldots, b_n$ minimalitásának.

Bázis = minimális generátorrendszer

Bizonyítás (másik irány)
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer. □

Megjegyzés: Így minden minimális generátorrendszer elemszáma, és minden maximális független rendszer elemszáma ugyanaz: a vektortér dimenziója.

Bázis készítése

Következmény (F4.5.7. Tétel)
Végesen (mondjuk n elemmel) generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás
Vegyünk hozzá vektorokat, amíg maximális független nem lesz. Ez legfeljebb n lépésben véget ér. □

Következmény (F4.5.6. Tétel)
Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bizonyítás
Hagyjunk el belőle, míg minimális generátorrendszer nem lesz. □

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)
Legyen V véges dimenziós vektortér és W *valódi*, vagyis az egész V-től különböző *altér*. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás
Legyen $\dim(V) = n$.
Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű. Így W-ben van maximális független $b_1, \dots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Indirekt feltevés: $m = n$. Ekkor $b_1, \dots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is, és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is, de W-ben is. Ezért az általa generált altér W is és V is, azaz $W = V$, ellentmondás. □

4. Vektorrendszer rangja

A rang definíciója

Definíció
Egy vektorrendszer *rangja* az általa generált altér dimenziója.

Tétel
Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás
Legyen F *maximális független rendszer* X-ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő. A korábbi 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től. Ezért $\langle F \rangle$ egy X-et tartalmazó altér, és így tartalmazza $\langle X \rangle$-et. Vagyis F *bázis* $\langle X \rangle$-ben, és így F elemszáma az X rangja. □

Azaz *a rang a maximális függetlenek elemszáma.* Jele: $r(X)$.

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa.
A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

Tétel (HF)
Ha $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ *lineárisan független* vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát.

Ha $X = \{v_1, \dots, v_m\}$ *tetszőleges* vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél $\langle X \rangle$ és így $r(X)$ nem változik.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.
Végezzük el a Gauss-eliminációt az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében. Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja *a vezéregyesek száma.*

Bizonyítás: Algebra és Számelmélet kurzus, 18. dia.

5. Alterek összege

Alterek összege

Állítás
Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \,:\, u \in U,\, w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek *összege.*

Bizonyítás
$U + W$ *nem üres*, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1+w_1,\ u_2+w_2 \in U+W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1+u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$. Azaz $U + W$ *zárt az összeadásra.*
A λ*-szorosra való zártság* bizonyítása hasonló: HF. □

$U + W$ a *legszűkebb* U-t és W-t tartalmazó altér. Hiszen minden ilyen altér tartalmazza az $u + w$ alakú összegeket.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az *xy sík*, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez *egyértelmű* is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke. Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U+W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x)-f(1)\big)+f(1)$. $U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.
Ekkor $U+W=\mathbb{R}^{2\times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.
$U \cap W$ a diagonális mátrixok.

<u>HF*:</u> $\dim(U+W) = \dim U + \dim W - \dim(U \cap W)$.

6. Skaláris szorzat

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)
Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor
v és w ***skaláris szorzata*** $\langle v, w\rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ ***merőlegesek*** vagy ***ortogonálisak***, ha $\langle v, w\rangle = 0$. Jele: $v \perp w$.
A $v \in \mathbb{R}^n$ ***normája*** vagy ***hossza*** $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.
(Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.)

Állítás (F8.1. szakasz, <u>HF</u>)
Tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

<u>(1)</u> $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ és $\langle w, u+v\rangle = \langle w, u\rangle + \langle w, v\rangle$;

<u>(2)</u> $\langle \lambda v, w\rangle = \lambda\langle v, w\rangle$ és $\langle w, \lambda v\rangle = \lambda\langle w, v\rangle$.

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)
A $b_1, \ldots, b_n$ *ortonormált bázis, ONB* $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges. Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j\rangle = 0$, ha $i \neq j$. (Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás
Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1\rangle \\ \dots \\ \langle v, b_n\rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás
Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva
$\langle v, b_i\rangle = \lambda_1\langle b_1, b_i\rangle + \ldots + \lambda_n\langle b_n, b_i\rangle = \lambda_i\langle b_i, b_i\rangle = \lambda_i$. $\square$

7. Összefoglaló

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak
Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek
Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
|Független| $\leq$ dimenzió. |Generátorrendszer| $\geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.
Bázis = maximális független = minimális generátorrendszer.
Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója.
Vektorrendszer rangja a maximális függetlenek elemszáma.
A rang kiszámítása Gauss-eliminációval.
Alterek összegének dimenziója. Vektor koordinátái ONB-ben.