# 1. Csoportreprezentációk

### A csoportalgebra

**Definíció (7.9. Szakasz)**
Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és $T$ test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza ($\lambda_i \in T$). Ez vektortér $T$ fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis. A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a $G$-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk $T$ fölött.
Ez a *csoportalgebra*. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

**Példa**
Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor
$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)1 + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)a$.
$b_1 = (1 + a)/2$, $b_2 = (1 - a)/2$ bázis, $b_1^2 = b_1$, $b_2^2 = b_2$, $b_1 b_2 = 0$.
Ezért $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \leftrightarrow (\beta_1, \beta_2)$ gyűrűizomorfizmus $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$-vel.

### A csoportalgebra felbontása

**Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk**
Ha $G$ véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a $G$ konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha $G$ kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

Legyen $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \ldots \times R_k$, ahol $R_i \cong \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$.
Az $i$-edik *projekció*, ami $(r_1, \ldots, r_k)$-hoz $r_i$-t rendel, egy $\varphi_i : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűhomomorfizmust ad. A $G$ elemeire megszorítva ez egy $G \to \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$ csoporthomomorfizmus. Ezek tökéletesen megfogják $G$ szerkezetét.

**Definíció (475. oldal)**
A $G$ véges csoport $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-be vezető homomorfizmusait a $G$ (komplex fölötti) *reprezentációinak* nevezzük.

**Az $S_3$ példája**

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).
$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a $g$-nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

$\varphi_3(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
$\varphi_3\big((123)\big) = \begin{pmatrix} \cos 120° & -\sin 120° \\ \sin 120° & \cos 120° \end{pmatrix}$
$\varphi_3\big((12)\big) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (az $y$-tengelyre való tükrözés).

**Állítás (NB)**
$\mathbb{C}[S_3] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2\times 2}$.
A három projekció a fenti három reprezentációnak felel meg.

**Homomorfizmusok csoportjai**

**7.7.1. Definíció**
Legyenek $G$ és $H$ Abel-csoportok. Ha $\varphi$ és $\psi$ homomorfizmusok $G$-ből $H$-ba, akkor *pontonkénti összegük:* $(\varphi+\psi)(g) = \varphi(g)+\psi(g)$ is az. Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G, H)$.

**Példa (7.7.7. Gyakorlat)**
$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}^+$.

Ha $\varphi(1) = m$, akkor $\varphi(n \cdot 1) = nm$. Ez egy $\varphi_m$ homomorfizmus. Vagyis $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+)$ elemei a $\varphi_m$-ek ($m$-mel szorzások). Nyilván $\varphi_{m+k} = \varphi_m + \varphi_k$. Ezért $m \to \varphi_m$ izomorfizmus $\mathbb{Z}^+$ és $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+)$ között.
HF: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_4^+, \mathbb{Z}_6^+) \cong \mathbb{Z}_2^+$ (7.7.8. Kérdés).

**Abel-csoport duálisa**

**Tétel**
Ha $G$ véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

**Bizonyítás**
Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$. Ez egyértelműen meghatározza $\chi$-t, jelölje ezt a leképezést $\chi_\varepsilon$. Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz. Nyilván $\chi_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1}\chi_{\varepsilon_2}$, hiszen az 1-et mindkettő $\varepsilon_1\varepsilon_2$-be viszi. Ezért $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^d = 1\} \le \mathbb{C}^\times$. Ez pontosan a $d$-edik egységgyökök részcsoportja, ami ciklikus, bármelyik $d$-edik primitív egységgyök generálja. Ezért $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}_d^+$.

**Direkt szorzat és** Hom

**7.7.11. Feladat**
$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt $G$, $H$, $K$ Abel).

**Bizonyítás**
Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi\big((g, 1_H)\big)$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi\big((1_G, h)\big)$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$,
akkor legyen $\varphi\big((g, h)\big) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.
HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. $\square$

$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$ bizonyítása: Bontsuk $G$-t a véges Abel-csoportok alaptétele szerint (prímhatványrendű) ciklikus csoportok direkt szorzatára, és alkalmazzuk a fenti állítást. $\square$
Név: $\widehat{G}$ a $G$ *duálisa*. Folytonos csoportokra: *Pontrjagin-dualitás*.

**Ortogonalitás**

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a $G$ Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: *csoportkarakterek* (csak ha $G$ kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha $\chi$ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha $g_0$-lal végigszorozzuk $G$ elemeit, akkor $G$ minden elemét egyszer kapjuk meg. Ezért
$S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g) = \chi(g_0) S$.
Mivel $\chi(g_0) \neq 1$, ezért $S = 0$. $\square$

**Következmény**
Ha $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$, akkor $\sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \psi(g) = 0$.

Valóban: $\chi(g^{-1})\psi(g)$ a $\chi^{-1}\psi \in \widehat{G}$-nek a $g$-nél felvett értéke. $\square$

**A karaktertábla, mint mátrix**

**Állítás**
Legyen $G$ Abel-csoport, rendje $n$, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok $G$ elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a $g$-edik sor $\chi$-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*\big((1/n)S\big) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

**Bizonyítás**
Számítsuk ki $S^*S$-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$. Az ortogonalitás miatt $S^*S$ diagonális mátrix. A főátlóban $\chi(g^{-1})\chi(g) = 1$ miatt $n$ áll. $\square$

Tekintsük $(1/n)S$-et egy bázistranszformáció áttérési mátrixának.
A $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ a régi bázis, az új bázis elemei:
$b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$, ahol $\chi \in \widehat{G}$.
Ez tényleg bázis, mert $S$ invertálható.

**A csoportalgebra felbontása**

**Állítás**
Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G}\chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

<u>Valóban,</u> $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f\in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f}\chi(h)\psi(g)$, és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f)\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\psi(g)$. Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$, akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$, tehát $s_f = |G|\psi(f)$, és $b_\chi^2 = b_\chi$. □

Mivel a $b_\chi$ elemek bázist alkotnak, a csoportalgebra minden eleme egyértelműen felírható $\sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi$ alakban ($X_\chi \in \mathbb{C}$). Ezt $(\ldots, \mu_\chi, \ldots) \in \mathbb{C}^n$-nek megfeleltetve *gyűrűizomorfizmust* kapunk $\mathbb{C}[G]$ és a $\mathbb{C}^n$ direkt szorzat között.

<u>Valóban,</u> a szorzattartás a fenti összefüggések következménye. □

# 2. Diszkrét Fourier-transzformáció

**A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció**
Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,
továbbá $\mathbf{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathbf{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az $\mathbf{x}$ vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathbf{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathbf{x}(g) = x_g$.)
<u>Bázistranszformáció:</u> $\mathbf{X}^T = S^*\mathbf{x}^T$ és $\mathbf{x}^T = (1/n)S\mathbf{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G}\overline{\chi(g)}x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G}\chi(g)X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{X}$ a *diszkrét Fourier-transzformáció*. Jele $\mathbf{X} = \widehat{\mathbf{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathbf{X} \mapsto \mathbf{x}$ az *inverz Fourier-transzformáció*. Jele $\mathbf{x} = \widehat{\mathbf{X}}$.

<u>Alaptulajdonságok:</u> $(1/\sqrt{n})\,\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért
$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y}\rangle = (1/n)\langle \mathbf{X}, \mathbf{Y}\rangle$, azaz $\sum_{g\in G}\overline{x_g}y_g = (1/n)\sum_{\chi\in\widehat{G}}\overline{X_\chi}Y_\chi$.
$\|\mathbf{x}\| = (1/n)\|\mathbf{X}\|$, azaz $\sum_{g\in G}|x_g|^2 = (1/n)\sum_{\chi\in\widehat{G}}|X_\chi|^2$.
(*Parseval-formula*, illetve *Plancherel-formula*).
$\sum_{g\in G} x_g g \mapsto \mathbf{X}$ gyűrűhomomorfizmus $\mathbb{C}[G]$-ből $\mathbb{C}^n$-be.

**Konvolúció**

Legyen $\mathbf{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathbf{y} = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá
$(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $\mathbf{z} = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az $\mathbf{x}$ és $\mathbf{y}$ *konvoluciója*, jele $\mathbf{x} * \mathbf{y}$. Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője. A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát $\mathcal{F}(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = \mathcal{F}(\mathbf{x})\,\mathcal{F}(\mathbf{y}) = (\ldots, \mathbf{X}_\chi \mathbf{Y}_\chi, \ldots)$ (pontonkénti szorzás).

**A konvolúció tulajdonságai**

- Mindkét változóban lineáris $\mathbb{C}$ fölött, kommutatív, asszociatív.
- Van egységelem: $x_1 = 1$ és $x_g = 0$ $(g \neq 1)$ megfelelő.
- Legyen $T_h$ a $h \in G$-vel való jobbszorzás a csoportalgebrán, ez $h$-val való *eltolás*. Ekkor $T_h(\mathbf{x})(g) = \mathbf{x}(gh^{-1})$
  (HF). Konvolúció eltoltja: $T_h(\mathbf{x} * \mathbf{y}) = T_h(\mathbf{x}) * \mathbf{y} = \mathbf{x} * T_h(\mathbf{y})$.

**Konjugált transzformáltja**

**Tétel**
Legyen $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor
$\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$,
azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathbf{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathbf{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

**Bizonyítás**
$\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ *konjugáltja* legyen $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$-nek, minden $g \in G$ konjugáltja önmaga.)
Mivel $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ (pontonkénti inverz)
ezért $b_\chi = (1/n) \sum_{g\in G} \chi(g) g$ konjugáltja $b_{\chi^{-1}}$. Így
$\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_{\chi^{-1}} = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$.
Az inverz transzformációt az $x_g = (1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$ képlettel számítva
$(1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g) \overline{X_\chi} = \overline{(1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g^{-1}) X_\chi} = \overline{x_{g^{-1}}}$. $\square$

# 3. Idő- és frekvenciatartomány

### Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$,
akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$.
Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus $G$ és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.
Mintavétel a $pj/n$ helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \le j < n$.

**Főpélda**
Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \le m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj}\varepsilon^{mj}$.
De $\varepsilon^{(m-k)j} = \chi_{m-k}(j)$, tehát az ortogonalitás miatt $X_{\chi_k} = 0$ ha $n \nmid m-k$, azaz ha $m \ne k$, hiszen $0 \le k, m < n$. Ha $k = m$, akkor $X_{\chi_k} = n$ (az összeg minden tagja 1).
<u>HF:</u> $\overline{f(x)}$ transzformáltja $X_{\chi_k} = n$ ha $k = n - m$ és 0 egyébként.

### A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \le j < n$. Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából $m$ értékét viszakapni?
($\mathbf{y}$ az *időtartomány*, transzformáltja a *frekvenciatartomány*.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor $y_j$ azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges.
Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \ne n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.
Mivel $g(x) = \sin(mx) = \big(f(x) - \overline{f(x)}\big)/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$; egyébként $Y_{\chi_k} = 0$.

A $-\sin\big((n-m)x\big)$ függvény ugyanazt a mintát adja, mint $\sin(mx)$. Ha előre tudjuk, hogy $n > 2m$ is teljesül, akkor $m$ és $n - m$ közül már ki tudjuk választani a megfelelőt, mert $n - m > n/2$. Vagyis elég sűrű mintavételezéssel kell dolgozni.

### Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz. A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \le j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$,
továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, $2\pi$ szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető, ami $\sin(m \cdot 2\pi t)$ és $\cos(m \cdot 2\pi t)$ alakú függvények (végtelen) lineáris kombinációja. Ha mindegyik $m \leq 880$ (és így az összeg véges), akkor a Fourier-transzformáltban csak $\chi_m$ és $\chi_{n-m}$ szerepelhet. De $n-m > 880$, ezért a szereplő frekvenciák értéke és amplitúdója rekonstruálható.
Shannon-Nyquist tétele: A jelben előforduló maximális frekvencia több, mint duplájával elég mintavételezni.

### Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$. A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel *alias*-ának nevezzük.

Védekezés: Anti-aliasing szűrő. A mintavételezés (digitalizálás) előtt használunk egy analóg, alul-áteresztő szűrőt, ami a jelből levágja a kívánt mintavételezési frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú jeleket. (A CD esetében a mintavételezési frekvencia 44.1 kHz, mert az emberi hallás felső határa 20 kHz.)

### 2D diszkrét Fourier-transzformáció

**Képfeldolgozás**
Most $f$ egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban ($0 \leq j < n$, $0 \leq k < m$).

A *2D diszkrét Fourier-transzformáció* csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így
$\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) : p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$
($\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m)$).
Nyilván $(p, q) \to (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus $G$ és $\widehat{G}$ között.

Legyen $x_{j,k} = f(aj/n, bk/m)$, írjunk $(\chi_p, \psi_q)$ helyett $(p, q)$-t.
Ekkor a transzformált $X_{p,q} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^{-jp} \eta^{-kq} x_{j,k}$,
mert $\overline{\chi_p(j)} = \varepsilon^{-jp}$ és $\overline{\chi_q(k)} = \eta^{-kq}$. Exponenciális jelöléssel:
ha $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, akkor $\varepsilon^{-jp}\eta^{-kq} = e^{-2\pi i[(jp/n)+(kq/m)]}$.
*Inverz:* $x_{j,k} = \big(1/(mn)\big) \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} e^{2\pi i[(jp/n)+(kq/m)]} X_{p,q}$.

# 4. Zajcsökkentés

### Szűrők

Legyen $\mathbf{x}$ egy minta, le akarjuk vágni az $f$ frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen $\mathbf{x}$ transzformáltja $\mathbf{X}$ (mostantól $X_{\chi_k}$ helyett $X_k$-t írunk),
továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként. Az $\mathbf{XY}$ (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt. A kapott $\mathbf{z}$ minta megfelelő lesz.

### Alternatíva

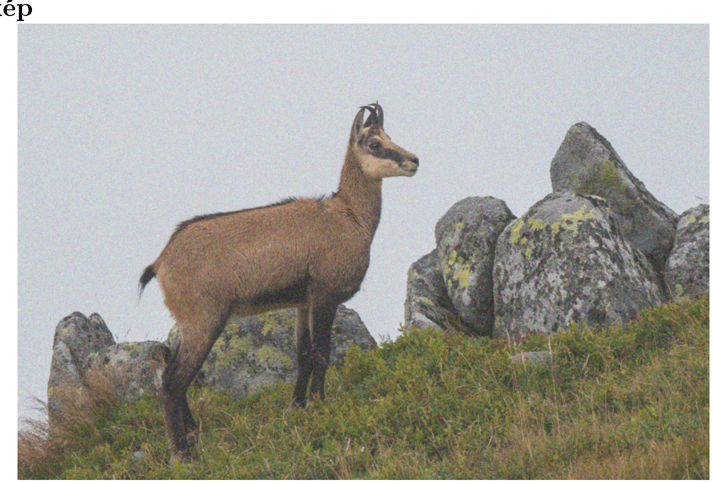
A keresett $\mathbf{z}$ megkapható, mint $\mathbf{x} * \mathbf{y}$ (konvolúció), ahol $\mathbf{y}$ az $\mathbf{Y}$ inverz Fourier-transzformáltja.

Kompromisszumot kell kötni a számítási igény miatt. Például kinullázni $\mathbf{y}$ kis abszolút értékű komponenseit, vagy kevésbé agresszív vágást alkalmazni $\mathbf{Y}$ definíciójában.

### Eredeti kép

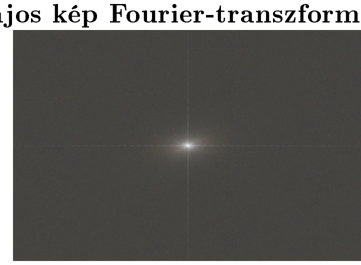
Ezen a képen fogjuk bemutatni a zajcsökkentési algoritmusokat.

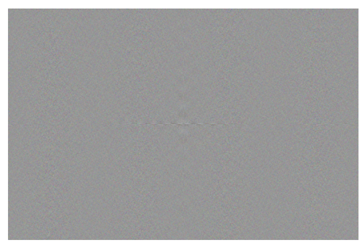
**Zajos kép**



A képhez normális eloszlású (Gaussian) zajt adtunk hozzá. Ezt próbáljuk majd eltávolítani különféle módszerekkel.

**A zajos kép Fourier-transzformáltja**

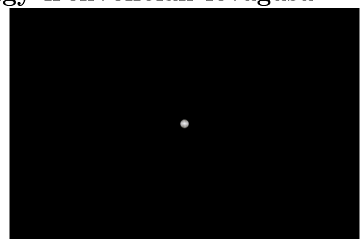




Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk. A jobb oldali kép pontjai a megfelelő szám szögét (fázisát), a másik kép pontjai az abszolút értékét (amplitúdóját) ábrázolják. Utóbbiak fel vannak skálázva, mert az értékek olyan kicsik, hogy szinte az egész kép fekete lenne (fekete = 0, fehér = 1).

Az elrendezés olyan, hogy minél távolabb vagyunk a középponttól, annál nagyobb frekvenciákhoz tartozó értékeket látunk. Középen fényesebb a kép, így a kis frekvenciák értékei a nagyobbak.

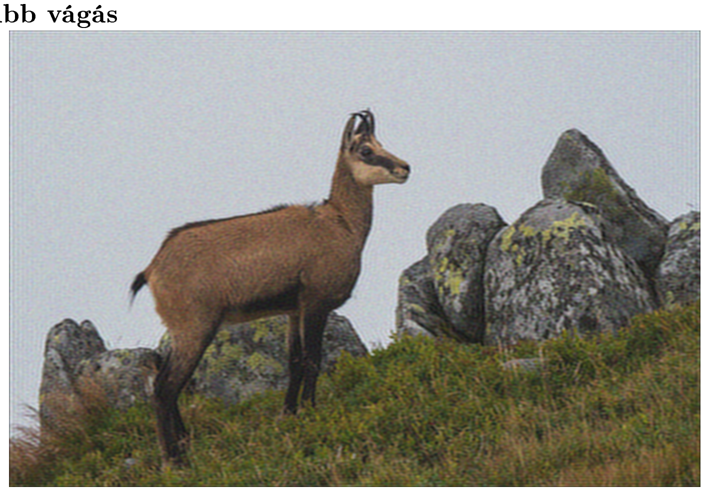
**A nagy frekvenciák levágása**




A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép életlenné vált, és az élekkel párhuzamos vonalak jelentek meg. Utóbbi az úgynevezett *Gibbs-jelenség.* Oka a következő.

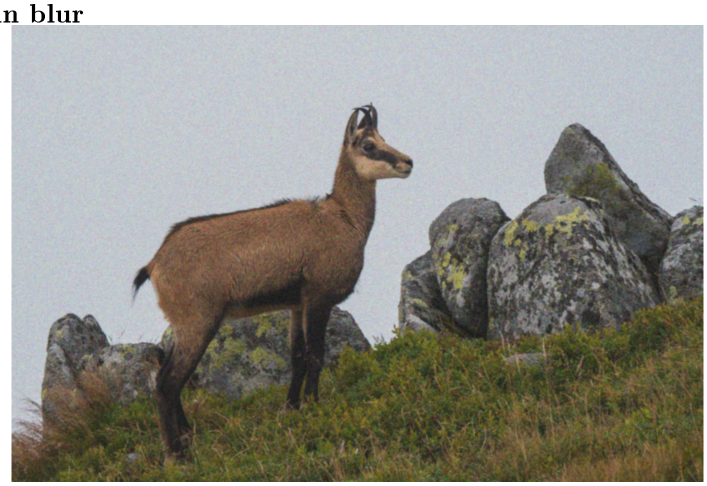
A transzformáltat egy olyan függvénnyel szoroztuk, amely a középső körön belül 1, másutt nulla. Ha ezt visszatranszformáljuk, akkor nagy amplitúdójú rezgések szerepelnek benne, és ezzel a függvénnyel kell konvolúciót képezni.

**Óvatosabb vágás**



Itt nagyobb átmérőjű körrel vágtuk le az amplitúdókat ábrázoló képet. Még jobb eredményt kaphatunk kevésbé durva átmenettel.

**Gaussian blur**



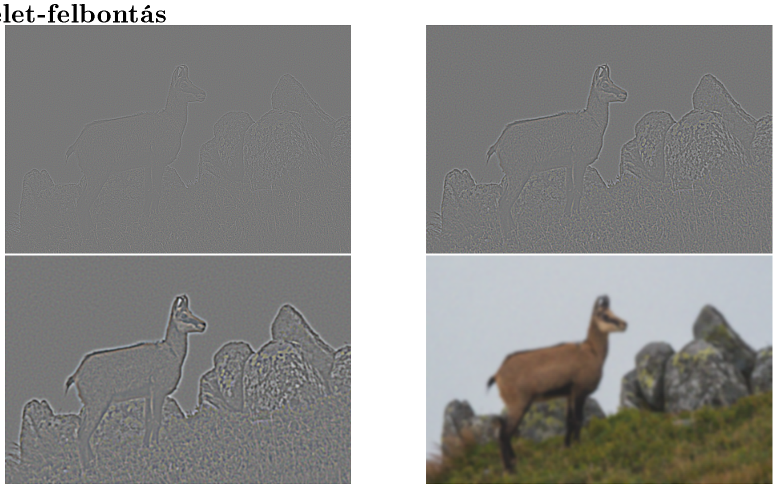
A művelet egy kétdimenziós Gauss-görbével való konvolúció. A Gibbs-féle vonalak eltűntek, de a kép még mindig lágy.

**Wavelet-felbontás**

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk. Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani. Minden réteg egyre nagyobb léptékű alakzatokat választ ki. Mivel a zaj tipikusan kis léptékű, lehetséges a zajcsökkentés úgy, hogy a kis léptékű rétegekben agresszívabban filterezünk. Minden egyes rétegben meg is vizsgálhatjuk a zaj mértékét. Ehhez a valószínűségszámításban tanult *szórást* kell kiszámítani.

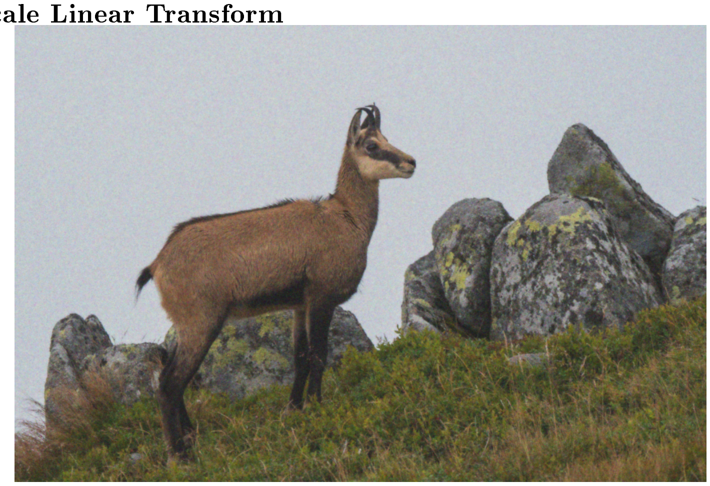
Itt az első két réteg látható ...

**Wavelet-felbontás**



... itt pedig a következő három, majd a kép megmaradó része. A kép „élességét” adó információt a kis léptékű rétegek hordozzák.

**Multiscale Linear Transform**

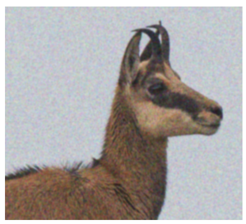


Az imént leírt algoritmust használtuk 5 réteg segítségével. Két részletet érdemes kinagyítani.

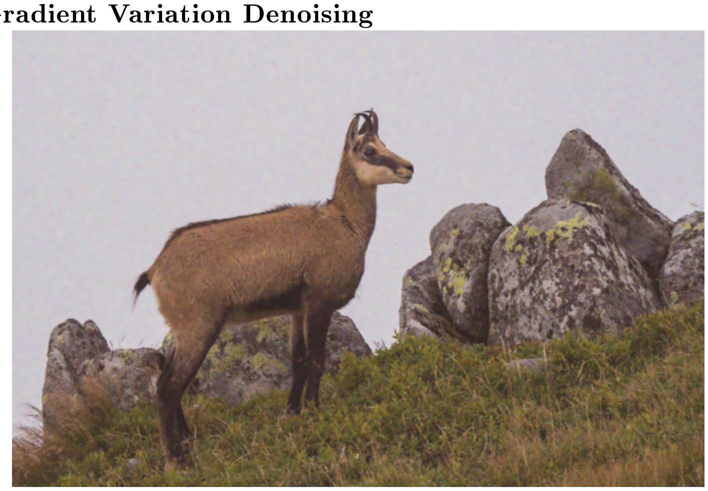
**A részletek élessége**

Bal oldal: Gaussian Blur. Jobb oldal: MLT.

A MLT több részletet meghagy, és ugyanannyira zavaró a zaj.



**Total Gradient Variation Denoising**



Ez egy másik algoritmus eredménye, agresszív paraméterekkel.

*www.lightvortexastronomy.com/tutorial-noise-reduction.html*

# 5. További alkalmazások

### JPEG tömörítés

**A tömörítés elve**

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban: az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (*kvantálás*). (A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

Probléma: a Gibbs-jelenség. Nem folytonos (szakadó) függvény transzformáltja nem ad „szép” eredményt.

A képet $8\times 8$-as blokkokra vágjuk, ezeken belül már „sima”. Mivel $\mathbb{Z}_n^+$-ban mod $n$ számolunk, az is „szakadás”, ha a blokk két szemközti szélén nagy a kontraszt eltérése.

Megoldás: Diszkrét Fourier-transzformáció helyett *diszkrét koszinusz transzformáció.*

### Diszkrét koszinusz transzformáció

Az $\mathbf{x}$ jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben. A kapott $\mathbf{y}$ már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$. Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük. Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú $\mathbf{z}$ sorozatot kapunk.
Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden $j$-re.
Ha $\mathcal{F}(\mathbf{z}) = \mathbf{Z}$, akkor $\overline{\mathbf{Z}}$ inverz transzformáltja $(\ldots, \overline{z_{g^{-1}}}, \ldots)$.
Mivel $z_j$ valós, ezért $\overline{z_{g^{-1}}} = z_g$ a fenti szimmetria miatt. Vagyis $\overline{\mathbf{Z}} = \mathbf{Z}$, más szóval a transzformált is valós számsorozat.

Most $G = \mathbb{Z}_{4n}^+$; ha $\varepsilon = e^{2\pi i/(4n)}$ és $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, akkor $z_k = z_{4n-k}$ miatt
$Z_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{4n-1} \overline{\chi_k(j)} z_j = 2\sum_{j=0}^{2n-1} z_j \cos\big(2\pi jk/(4n)\big) =$
$= 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\big(\pi k(m+(1/2))/n\big)$.

**A DCT inverze**

Írjunk $\chi_k$ helyett $k$-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\big(\pi k(m+(1/2))/n\big)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert $x_k$ valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathbf{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi $Z_k$-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathbf{x} \to \mathbf{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a *diszkrét koszinusz transzformáció (DCT).* Inverze
$x_j = \big(1/n\big)\big[Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos\big(\pi k(j+(1/2))/n\big)\big]$.

Bizonyítás: $x_j = z_{2j+1}$ kiszámításához a $z_g = (1/n)\sum_{\chi\in G}\chi(g)Z_\chi$ képletet használjuk: $z_m = \big(1/(4n)\big)\sum_{k=0}^{4n-1}\varepsilon^{mk}Z_k$. Ha $1 \le k < n$,
akkor $Z_k$ együtthatója $\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{m(4n-k)} - \varepsilon^{m(k+2n)} - \varepsilon^{m(4n-(k+2n))} =$
$= \varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk} - \varepsilon^{2nm}(\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk}) = 4\cos\big(\pi mk/(2n)\big)$ páratlan $m$-re, mert $\varepsilon^{2n} = -1$. A $Z_0$ együtthatója $\varepsilon^{m\cdot 0} - \varepsilon^{m\cdot 2n} = 2$. $\square$

**A DCT mint bázistranszformáció**
Ha az $S$ mátrix $j$-edik sorának $k$-adik eleme $\cos\big(\pi k(j + (1/2))/n\big)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathbf{x}^T \to \mathbf{Z}^T = 2S^T\mathbf{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)S\mathbf{Z}^T$ nem teljesen $\mathbf{x}^T$, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz $S$ első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg $S$ első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen $R$.
Ekkor $2R^T\mathbf{x}^T$-ban $Z_0$ helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni.
Ezért $(2/n)RR^T\mathbf{x}^T = \mathbf{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

**A JPEG tömörítés lépései:**

- DCT a $8 \times 8$-as blokkokon.
- Kvantálás (a tömörítés lényeges lépése).
- Huffmann-kódolás (veszteségmentes tömörítés).

Progresszív tömörítés: először csak az alacsonyabb frekvenciájú komponenseket küldjük el. Az átjövő kép egyre élesebb lesz.

# 6. Keretek és csoportok

**Redundáns koordinátázás**
Ha $\mathbf{X}^T = S^*\mathbf{x}^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor $X_k$ az $S$ megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata $\mathbf{x}$-nek. Az $S$ oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert *keretnek* (frame) nevezünk.

**Példa**
Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor $(x_1, x_2)$ transzformáltja $(1/2)(2x_1,\ -x_2 + \sqrt{3}x_2,\ -x_2 - \sqrt{3}x_2)$.

**Előnyök**

- Ez egyfajta hibajavító kódolás.
- Több információt kaphatunk az eredeti jelről.

Irodalom: short-time (windowed) Fourier-transform, Gabor-frame.
(Gábor Dénes).

**Mátrixcsoportok**

Legyen $G$ véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás *irreducibilis*, ha $G$ elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: $G$ minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$).
(Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor $G$ pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik.
Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (*időeltolás*).
Ha $\mathcal{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{X}$ és $\mathcal{F}(\mathbf{y}) = \mathbf{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) = (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$ (*fáziseltolás*).
<u>HF:</u> Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i \sin(2\pi/d)$. A $T$ és $W$ által generált $G$ részcsoport irreducibilis $\mathbb{C}^d$-n, $T$ és $W$ rendje $d$, továbbá $T^{-1}WT = \varepsilon W$ és $G$ rendje $d^3$.
A Gabor-keret ennek a skalármátrixok normálosztója szerinti faktorából származtatható.