

1. Bevezetés

A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat \mathbb{R}^n -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
- * Bilineáris függvény, Sylvester tehetetlenségi tétele
- * Szingulárisérték-felbontás

Tankönyv: *Freud Róbert: Lineáris algebra.*

A félév anyaga absztrakt algebrából

Célkitűzés: A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- Csoportok:
 - Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
 - Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat*.
 - Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
 - Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.
- Gyűrűk és testek:
 - Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
 - Szám minimálpolinomja, testbővítés foka*.
 - * Geometriai szerkeszthetőség, egyenletek megoldóképlete.
 - * Véges testek. Hibajavító kódolás.
 - * Kvaterniók csoportelméleti vonatkozásai, térbeli forgatás.
 - * Csoportalgebra, Fourier-transzformáció, tömörítés, zajszűrés.
- Jegyzetek:
 - *Kiss Emil: Bevezetés az algebrába.*
 - Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok.

A számonkérés anyaga és módja

A gyakorlat célja az elméleti anyag *megértése*.

- Módja: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két *évfolyamzárthelyi*;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

Az *előadáson* figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

- *Írásbeli vizsga*. Anyaga: e prezentáció nem csillagos részei.
- Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
- Hivatkozások a tankönyvekre, ahol magyarázatok is vannak.
- Minta: az előző évi vizsgák a honlapon.

2. Vektortér

Oszlopvektorok (ismétlés)

Definíció

Legyen T test. A T fölötti n magasságú *oszlopvektorok* az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol $a_1, \dots, a_n \in T$. Ezek halmaza T^n .

Definíció

Legyen T test, és értelmezzük T^n -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \text{ és } \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az *összeadást* és a λ *skalárral szorzást* ($\lambda \in T$). Azaz összeadni és skalárral szorozni *komponensenként* kell.

Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v, w \in T^n$ vektorokra

(1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).

(2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).

(3) $u + 0 = 0 + u = u$ (0 a *nullvektor*).

(4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ ($-u$ az u *ellentettje*).

$$\text{A nullvektor } 0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és az ellentett: } - \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$$

(minden komponens T nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges $u, v \in T^n$ vektorokra, és λ, μ skalárookra

(5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.

(6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.

(7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.

(8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A $T^{n \times m}$ -beli mátrixok.
- $T[x]$ polinomjai: $\lambda(a_0 + \dots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \dots + (\lambda a_n) x^n$.
- Valós függvények (a *pontonkénti* műveletekre):
($f + g$)(x) = $f(x) + g(x)$ és (λf)(x) = $\lambda(f(x))$.

A vektortér fogalma

Definíció (F4.1.1. Definíció)

T test (elemei a *skalárok*), V halmaz (elemei a *vektorok*). V vektortér T fölött, ha értelmezett a V -beli $+$ összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges $u, v, w \in V$ és $\lambda, \mu \in T$ esetén

- (1) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (az összeadás *asszociatív*).
- (2) $u + v = v + u$ (az összeadás *kommutatív*).
- (3) $u + 0 = 0 + u = u$ (*LÉTEZIK* 0 *nullvektor*).
- (4) $u + (-u) = (-u) + u = 0$ (*LÉTEZIK* $-u$, az u *ellentettje*).
- (5) $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$.
- (6) $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$.
- (7) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$.
- (8) $1 \cdot u = u$ (ahol 1 a T test *egységeleme*).

A sík és a tér vektorai

Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor *egyenlő*, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak. Így minden vektor kezdőpontja az O origóba tolató. Az A pont és az \vec{OA} vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az \vec{OA} az A pont *helyvektora*. Ha $A = (a, b, c)$, akkor \vec{OA} jele is (a, b, c) . Tehát (a, b, c) nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (**HF**). A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti műveleteknek felelnek meg. Ezért a térvektorok vektortere „ugyanolyan”, mint az oszlopvektorok \mathbb{R}^3 vektortere.

Elemi következmények

Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött, $\lambda \in T$, $v \in V$.

- (1) A V nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden v vektorra $0v = 0$ (a bal 0 skalár, a jobb 0 vektor).
- (4) Minden λ skalárra $\lambda 0 = 0$ (itt 0 a nullvektor).

(5) Ha $\lambda v = 0$, akkor $\lambda = 0$ vagy $v = 0$.

(6) Minden v vektorra $(-1)v = -v$ (a v ellentettje).

Mintabizonyítás (5)-re

Ha $\lambda v = 0$, de $\lambda \neq 0$, akkor létezik λ^{-1} .

Így $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$. □

A fenti (4) miatt.

A (7) vektortéraxióma miatt.

A (8) vektortéraxióma miatt.

3. Altér, generátorrendszer

Az altér fogalma

Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ részhalmaz *altér*, ha maga is vektortér V műveleteire nézve.

Példák

(1) V a sík vektorai \mathbb{R} fölött. W az x -tengellyel párhuzamos vektorok.

Azaz W az x -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

(2) $V = \mathbb{Q}[x]$ a \mathbb{Q} fölött. W azok a polinomok, amelyeknek az 1 gyöke.

(3) V a valós függvények \mathbb{R} fölött. W a folytonos függvények.

(4) V a kétszer kettes komplex mátrixok \mathbb{C} fölött.

W a felső háromszögmátrixok.

Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen V vektortér a T test fölött. A $W \subseteq V$ nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1) W zárt az összeadásra, azaz tetszőleges $w_1, w_2 \in W$ esetén $w_1 + w_2 \in W$.

(2) W zárt a skalárral szorzásra, azaz tetszőleges $\lambda \in T$ és $w \in W$ esetén $\lambda w \in W$.

Segítség: $0 = 0v$, és az ellentett $-v = (-1)v$.

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Altér metszete is altér.

(3) Két altér uniója *csak akkor* altér, ha valamelyikük tartalmazza a másikat.

Altér készítése

Kérdés

Adott egy v vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A v skalárszorosait (azaz a λv vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a v -vel párhuzamos vektorok, ha $v \neq 0$. A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az x és x^2 polinomok $\mathbb{R}[x]$ -ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Az $ax + bx^2$ alakú polinomok már alteret alkotnak ($a, b \in \mathbb{R}$).

Generált altér

Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ alakú vektorok, ahol $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$, alteret alkotnak V -ben. Ez a $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ által *generált altér*, jele $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$.

Elnevezések

A v_1, \dots, v_m vektorok neve: *generátorok*.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$ a v_1, \dots, v_m egy *lineáris kombinációja*.

A $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ ennek a lineáris kombinációnak az *együtthatói*.

A v_1, \dots, v_m *generátorrendszer* a V vektortérben, ha $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$.

A *generált altér* a *generátorok lineáris kombinációinak halmaza*.

Egy vektortérnek általában sok generátorrendszere van!

Példák generátorrendszerre

Legyen V a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere \mathbb{R} fölött.

Ebben $\{1, x\}$ generátorrendszer, mert $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$ alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ($\lambda, \mu \in \mathbb{R}$). De generátorrendszer $\{1 + x, x\}$ is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis $\lambda(1 + x) + \mu x$ alakban V minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak! Például $\{1, x, x^2\}$ *nem* generátorrendszer a fenti V -ben, noha V elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha v és w nem párhuzamos síkvektorok, akkor generátorrendszert alkotnak a sík vektorainak vektorterében.

A tétel bizonyítása

F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ a legszűkebb v_1, \dots, v_m -et tartalmazó altér.
Azaz ha W altér és $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$.

Bizonyítás

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$.

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ nem üres, mert $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$.

Ha $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$ és $\lambda \in T$, akkor $\lambda u \in U$, mert $\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$. Így U skalárral szorzásra zárt.

Az összegre zárttság bizonyítása hasonló, HF.

Ha $v_1, \dots, v_m \in W$, akkor $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt a skalárral szorzásra. Ezért $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in W$, mert W zárt az összeadásra. Így $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$ minden eleme W -ben van. \square

4. Lineáris függés és függetlenség

Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík u, v vektorai egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. Esetszétválasztás nélkül: ha vannak olyan λ, μ skalárok, *nem mindkettő nulla*, hogy $\lambda u + \mu v = 0$.

Mikor vannak a tér u, v, w vektorai egy síkban? Másképp: mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

Ha $u \parallel v$, akkor igen. Ha nem, akkor abban az esetben, ha w felírható $\alpha u + \beta v$ alakban (mert u és v generálják ezt a síkot). Esetszétválasztás nélkül: ha vannak olyan λ, μ, ν skalárok, *nem mindhárom nulla*, hogy $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$.

Lineáris függetlenség (ismétlés)

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$. Ezek a vektorok *lineárisan függetlenek*, ha tetszőleges $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ skalárokra $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ CSAK ÚGY teljesülhet, ha $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$. Egyébként a $v_1, \dots, v_m \in V$ vektorok *lineárisan összefüggők*.

Triviális lineáris kombináció: minden együtttható nulla. Vagyis v_1, \dots, v_m akkor és csak akkor lineárisan független, ha CSAK a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például $1, x, x^2$ lineárisan független $\mathbb{R}[x]$ -ben \mathbb{R} fölött, mert ha $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$ (a nullapolinom), akkor minden együtttható nulla, azaz $a = b = c = 0$.

Példák függésre és függetlenségre

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok \mathbb{R} fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban, $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, és pl. $2 \neq 0$.

Az $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ és a $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$ vektorok \mathbb{R} fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$ és $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$. Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

Három térvektor pontosan akkor van egy síkban, ha összefüggők.

A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$ az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$ ismeretlenekre.

A v_1, \dots, v_m akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha *nincs szabad változó*.

Következmény: Ha több vektor van, mint a vektorok magassága, akkor ezek lineárisan összefüggnek (van nemtriviális megoldás).

A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A $\{v\}$ egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha $v \neq 0$.
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

- (6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független \mathbb{R} fölött, ha nem párhuzamosak.
- (7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő \mathbb{R} fölött, ha egy síkban vannak.

5. Bázis

A bázis fogalma

Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer *bázis*, ha lineárisan független és generátorrendszer.

Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen V vektortér a T test fölött és $b_1, \dots, b_n \in V$.

Ez pontosan akkor bázis V -ben, ha V minden eleme *egyértelműen felírható* a b_1, \dots, b_n lineáris kombinációjaként.

Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ bázis \mathbb{R}^2 -ben \mathbb{R} fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $\lambda = a$ és $\mu = b$ (azaz egyértelmű is).

Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ is bázis \mathbb{R}^2 -ben \mathbb{R} fölött, mert $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ akkor és csak akkor, ha $a = \lambda$ és $b = \lambda + \mu$, azaz ha $\lambda = a$ és $\mu = b - a$ (egyértelmű megoldás λ -ra és μ -re).

Legyen V a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere \mathbb{R} fölött.

Ebben $\{1, x, x^2\}$ bázis, mert minden V -beli polinom egyértelműen felírható $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$ alakban ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$ is bázis V -ben. Valóban:

$ax^2 + bx + c = \alpha(1 + x) + \beta(1 + x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$ pontosan akkor, ha $c = \alpha + \beta$, $b = \alpha$ és $a = \beta + \gamma$, azaz ha $\alpha = b$, $\beta = c - b$ és $\gamma = a + b - c$. *Lineáris egyenletrendszer az α, β, γ ismeretlenekre.*

Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket *szokásos* bázisnak nevezzük.

A sorrend lényeges (koordinátázás legközelebb).

- (1) A síkon, mint \mathbb{R} feletti vektortéren az $(1, 0)$, $(0, 1)$ pontok.

- (2) A T test feletti T^n vektortérben azon e_1, \dots, e_n vektorok, melyekre e_i -nek az i -edik komponense 1, a többi nulla. Speciálisan T -ben, mint önmaga feletti vektortérben az 1.
- (3) A \mathbb{C} -ben, mint \mathbb{R} feletti vektortérben az 1 és az i .
- (4) A $T^{m \times n}$ vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme 1, a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).
- (5) A $T[x]$ legfeljebb n -edfokú elemeiből álló vektortérben az $(1, x, x^2, \dots, x^n)$ bázis.

A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

Definíció (F4.6.1. Definíció)

A V vektortér bázisainak közös elemszámát a tér *dimenziójának* nevezzük. Jele $\dim V$ (vagy $\dim_T V$).

- (1) A sík kétdimenziós \mathbb{R} fölött.
- (2) $\dim_T T^n = n$.
- (3) $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$.
- (4) $\dim_T T^{m \times n} = mn$.
- (5) A $T[x]$ legfeljebb n -edfokú elemeiből álló vektortér $n + 1$ -dimenziós T fölött.

6. Összefoglaló

Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett. A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok. Altér, generált altér, generátorrendszer. Függetlenség, bázis, dimenzió.

Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2). Altér jellemzése zártsággal, altér nulleme (F4.2.15. Feladat). A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér. A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval. Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével. Bármely két bázis elemszáma ugyanaz.