Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

9. előadás

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$,
ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0 + v = v + 0$ két különböző, megfelelő fölírás,

Egyértelmű felírás összegként

Állítás (F4.3.6. Tétel)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása akkor és csak akkor egyértelmű, ha $U \cap W = \{0\}$.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $U \cap W = \{0\}$. Ha $u_1 + w_1 = u_2 + w_2$, ahol $u_1, u_2 \in U$, $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 - u_2 = w_2 - w_1$.
A bal oldal U-ban, a jobb oldal W-ben van. Tehát
$u_1 - u_2 = w_2 - w_1 \in U \cap W = \{0\}$, azaz $u_1 - u_2 = w_2 - w_1 = 0$.
Innen $u_1 = u_2$ és $w_1 = w_2$, tehát a fölírás egyértelmű.
Megfordítva, ha $0 \neq v \in U \cap W$, akkor $v = 0 + v = v + 0$ két különböző, megfelelő fölírás, így ez nem egyértelmű. $\square$

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű,

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ ($u \in U$, $w \in W$)
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U+W$ az U és W direkt összege,

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes
direkt összege.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U+W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$)
alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U + W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U+W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U + W$ elemeinek $u + w$ ($u \in U$, $w \in W$) alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U + W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$
alakú fölírása egyértelmű, azaz ha $U \cap V = \{0\}$,
akkor $U+W$ az U és W direkt összege, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.
W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan.

Direkt összeg

Definíció (F4.3.7. Definíció)

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ha az $U+W$ elemeinek $u+w$ $(u \in U,\ w \in W)$ alakú fölírása **egyértelmű**, azaz ha $U \cap V = \{0\}$, akkor $U+W$ az U és W **direkt összege**, jele $U \oplus W$.

A sík bármely két különböző, origót tartalmazó egyenes direkt összege.

U egy sík a térben, ami az origót tartalmazza.
W egy origón átmenő egyenes, ami nem része U-nak.
Ekkor a tér $U \oplus W$.

U azon polinomok, melyekben minden tag foka páros.
W azon polinomok, melyekben minden tag foka páratlan.
Ekkor $T[x] = U \oplus W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \dots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m)$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \dots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \dots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \dots, b_n, c_1, \dots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így $u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben,
akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$),
akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$,
akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$,
azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Mivel $c_1, \ldots, c_m$ független,

A direkt összeg bázisa és dimenziója

Állítás

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \cap W = \{0\}$.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban és $c_1, \ldots, c_m$ bázis W-ben, akkor $b_1, \ldots, b_n, c_1, \ldots, c_m$ bázis $U \oplus W$-ben.
Következmény: $\dim(U \oplus W) = \dim U + \dim W$.

Bizonyítás

Generátorrendszer: Ha $u + w \in U + W$ (ahol $u \in U$, $w \in W$), akkor $u = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ és $w = \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$, és így
$u + w = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m$.
Független: Ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n + \mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$, akkor $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = -(\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m) \in U \cap W = \{0\}$, azaz $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$ és $\mu_1 c_1 + \ldots + \mu_m c_m = 0$.
Mivel $b_1, \ldots, b_n$ független, ezért $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$.
Mivel $c_1, \ldots, c_m$ független, ezért $\mu_1 = \ldots = \mu_m = 0$. $\square$

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \dots, b_n$ bázis U-ban.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.
Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.
Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$. Ekkor $V = U \oplus W$.

Direkt kiegészítő altér

Definíció

Tegyük föl, hogy U, W alterek V-ben és $U \oplus W = V$.
Ekkor W az U (egyik) direkt kiegészítő altere.

Állítás

Minden altérnek van direkt kiegészítő altere.

Bizonyítás a véges dimenziós esetben

Legyen U altér V-ben és $b_1, \ldots, b_n$ bázis U-ban.
Ezt egészítsük ki a $c_1 \ldots, c_m$ vektorokkal V egy bázisává.
Megtehető: minden független rendszer kiegészíthető bázissá.
Legyen $W = \langle c_1, \ldots, c_m \rangle$. Ekkor $V = U \oplus W$.
A bizonyítás hasonló az előző tételéhez: HF. $\square$

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$.

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát,

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek.

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^{\perp}$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^{\perp}$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^{\perp}$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$,

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF). Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v\rangle = 0$.
Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^\perp = \{0\}$.

Ortogonális kiegészítő altér euklideszi térben

Definíció (F8.1.6. Definíció)

Legyen $H \subseteq V$. Ekkor $H^\perp$ jelöli azon vektorok halmazát, amelyek minden H-beli vektorra merőlegesek. Ez altér (HF).
Ha H altér, akkor $H^\perp$ a H ortogonális kiegészítő altere.

Tétel (F8.1.7. Tétel)

Minden U altérre $V = U \oplus U^\perp$.
Azaz V minden eleme egyértelműen felírható egy U-beli és egy U-ra merőleges vektor összegeként.

Bizonyítás

Nyilván $v \in U \cap U^\perp$ esetén $\langle v, v \rangle = 0$.
Innen $v = 0$, tehát $U \cap U^\perp = \{0\}$. Kell még: $U + U^\perp = V$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \dots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v \rangle b_m$.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^{\perp}$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^{\perp}$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \dots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v \rangle b_1 + \dots + \langle b_m, v \rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \dots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \dots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \dots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \dots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$,

Ortogonális kiegészítő altér: bizonyítás

Bizonyítás (folytatás)

Legyen $b_1, \ldots, b_m$ ortonormált bázis U-ban.
Ha $v \in V$, akkor legyen $u = \langle b_1, v\rangle b_1 + \ldots + \langle b_m, v\rangle b_m$.
A Gram-Schmidt-eljárásban láttuk, hogy $w = v - u$ merőleges mindegyik b_j-re, és ezért az összes lineáris kombinációikra is.
Így $w \in U^\perp$, és $u \in U$ miatt $v = u + w$ a kívánt felbontás. $\square$

Az u-t a v vektor U-ra vett merőleges vetületének hívjuk.
Megjegyzés: Egészítsük ki $b_1, \ldots, b_m$-et a Gram–Schmidt-eljárással V egy $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázisává.
Ekkor $U^\perp$ a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér (HF).

F8.1.9. Feladat (HF)

$(U^\perp)^\perp = U$, $(U_1 \cap U_2)^\perp = U_1^\perp + U_2^\perp$, $(U_1 + U_2)^\perp = U_1^\perp \cap U_2^\perp$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^{*}-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^{*}-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^{*}(v) \in W^{\perp}$.
Ez azt jelenti, hogy $A^{*}(v)$ merőleges minden W-belire,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^{\perp}$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,
azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$.

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^\perp$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^\perp$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^\perp$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,
azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v)\rangle = 0$. Ez igaz, mert
$\langle w, A^*(v)\rangle = \langle A(w), v\rangle = 0$,

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak invariáns altere, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^{\perp}$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,
azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v) \rangle = 0$. Ez igaz, mert
$\langle w, A^*(v) \rangle = \langle A(w), v \rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$

Invariáns altér

Definíció (F6.4.1. Definíció)

A $W \leq V$ altér az $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformációnak **invariáns altere**, ha minden $w \in W$ esetén $A(w) \in W$.

Azaz A nem tud W-ből vektort kivinni.

Állítás (F8.4.3. Tétel)

Ha a $W \leq V$ altér A-invariáns, akkor a $W^{\perp}$ altér A^*-invariáns.

Bizonyítás

Legyen $v \in W^{\perp}$, be kell látni, hogy $A^*(v) \in W^{\perp}$.
Ez azt jelenti, hogy $A^*(v)$ merőleges minden W-belire,
azaz tetszőleges $w \in W$-re $\langle w, A^*(v)\rangle = 0$. Ez igaz, mert
$\langle w, A^*(v)\rangle = \langle A(w), v\rangle = 0$, hiszen $A(w) \in W$ és $v \in W^{\perp}$. $\square$

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ által generált altér.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_b = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \dots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \dots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_\mathrm{b} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,
és a megszorítás mátrixa a $b_1, \ldots, b_m$ bázisban K.

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_{\mathrm{b}} = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,
és a megszorítás mátrixa a $b_1, \ldots, b_m$ bázisban K. Hasonlóan
A megszorítható W-re,

Mátrixok blokkfelbontása

Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.6.1. Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis a V vektortérben,
U a $b_1, \ldots, b_m$ és W a $b_{m+1}, \ldots, b_n$ által generált altér.
Ekkor $V = U \oplus W$. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Az U és W alterek pontosan akkor A-invariánsak, ha

$$[A]_b = \begin{bmatrix} K & O_1 \\ O_2 & L \end{bmatrix},$$

ahol a K blokk $m \times m$-es, az L blokk $(n-m) \times (n-m)$-es,
az O_1 és O_2 mátrixok pedig csupa nullából állnak.

Ilyenkor az A leképezés megszorítható U-ra,
és a megszorítás mátrixa a $b_1, \ldots, b_m$ bázisban K. Hasonlóan
A megszorítható W-re, és ennek mátrixa $b_{m+1}, \ldots, b_n$-ben L.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor:

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják,

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n)$

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n$,

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n$,
és $\lambda v = \mu_1 \lambda b_1 + \ldots + \mu_n \lambda b_n$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n$,
és $\lambda v = \mu_1 \lambda b_1 + \ldots + \mu_n \lambda b_n$.
Tehát $A(v) = \lambda v$ akkor és csak akkor, ha $\mu_k = 0$ minden k-ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$.

Diagonális mátrix sajátalterei

Állítás

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, melyben A mátrixa diagonális.
Azaz mindegyik b_j sajátvektor: $A(b_j) = \lambda_j b_j$.
Ekkor a $\lambda = \lambda_j$-hez tartozó sajátalteret azok a b_k-k generálják, amelyekre $\lambda_k = \lambda$. Ha $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált, akkor A sajátalterei páronként merőlegesek.

Bizonyítás

Legyen $v = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$. Ekkor
$A(v) = \mu_1 A(b_1) + \ldots + \mu_n A(b_n) = \mu_1 \lambda_1 b_1 + \ldots + \mu_n \lambda_n b_n$,
és $\lambda v = \mu_1 \lambda b_1 + \ldots + \mu_n \lambda b_n$.
Tehát $A(v) = \lambda v$ akkor és csak akkor, ha $\mu_k = 0$ minden k-ra, melyre $\lambda_k \neq \lambda$. Ha a bázis ortonormált, akkor a bázis két diszjunkt részhalmaza két merőleges alteret generál (HF). $\square$

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_b$ transzponált konjugáltja.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_b$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_b$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők,

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_b$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_b$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.
Az előző Állítás miatt A sajátalterei páronként merőlegesek.

A fő eredmény

V komplex feletti véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.
Emlékeztető: Az A normális transzformáció, ha $AA^* = A^*A$.

Tétel (F8.5.2. Tétel, F8.5.8. Feladat)

Az A pontosan akkor diagonalizálható ortonormált bázisban, ha normális. Ekkor A sajátalterei páronként merőlegesek, és V ezeknek a direkt összege. Ugyanezek A^* sajátalterei is, és a sajátértékek az A megfelelő sajátértékeinek konjugáltjai.

A triviális irány bizonyítása

Az A^* mátrixa az $[A]_b$ transzponált konjugáltja.
Ha $[A]_b$ diagonális, akkor a transzponált konjugáltja is.
Diagonális mátrixok felcserélhetők, így A és A^* is.
Az előző Állítás miatt A sajátalterei páronként merőlegesek.

HF: Ha $[A]_b$ diagonális, akkor A és A^* sajátalterei ugyanazok.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle.$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle.$

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és
$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w) \rangle - \overline{\lambda} \langle A^*(w), w \rangle - \lambda \langle w, A^*(w) \rangle + \lambda \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w \rangle = \langle w, A(w) \rangle = \langle w, \lambda w \rangle = \lambda \langle w, w \rangle$ és

$\langle w, A^*(w) \rangle = \langle A(w), w \rangle = \langle \lambda w, w \rangle = \overline{\lambda} \langle w, w \rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$,

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w \rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle = \langle A(w), A(w)\rangle$,

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle = \langle A(w), A(w)\rangle$,

ami $\langle \lambda w, \lambda w\rangle$

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)

$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$

$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt

$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és

$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.

Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért

$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle = \langle A(w), A(w)\rangle$,

ami $\langle \lambda w, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle w, w\rangle$.

Az adjungált sajátvektorai

Lemma (a bizonyítás kulcsa)

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$ és $A(w) = \lambda w$. Ekkor $A^*(w) = \overline{\lambda} w$.

Bizonyítás

Belátjuk, hogy $\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\| = 0$ (ekkor tehát $A^*(w) - \overline{\lambda} w = 0$.)
$\|A^*(w) - \overline{\lambda} w\|^2 = \langle A^*(w) - \overline{\lambda} w, A^*(w) - \overline{\lambda} w\rangle =$
$= \langle A^*(w), A^*(w)\rangle - \overline{\lambda}\langle A^*(w), w\rangle - \lambda\langle w, A^*(w)\rangle + \lambda\overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Az adjungált skaláris szorzattal való jellemzése miatt
$\langle A^*(w), w\rangle = \langle w, A(w)\rangle = \langle w, \lambda w\rangle = \lambda\langle w, w\rangle$ és
$\langle w, A^*(w)\rangle = \langle A(w), w\rangle = \langle \lambda w, w\rangle = \overline{\lambda}\langle w, w\rangle$.
Tudjuk, hogy $AA^* = A^*A$, ezért
$\langle A^*(w), A^*(w)\rangle = \langle w, AA^*(w)\rangle = \langle w, A^*A(w)\rangle = \langle A(w), A(w)\rangle$,
ami $\langle \lambda w, \lambda w\rangle = \overline{\lambda}\lambda\langle w, w\rangle$. Összevonva minden kiesik. $\square$

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$.

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. □

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris transzformációk,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris transzformációk, és $AB = BA$,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. □

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris transzformációk, és $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns,

Normális transzformációk sajátalterei

Következmény

Legyen W az A-nak a λ sajátértékhez tartozó sajátaltere.
Ha $AA^* = A^*A$, akkor W az A^*-nak a $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátaltere.

Bizonyítás

Jelölje U az A^* transzformáció $\overline{\lambda}$-hoz tartozó sajátalterét.
A Lemma miatt $W \subseteq U$. A lemmát A helyett A^*-ra
és λ helyett $\overline{\lambda}$-ra alkalmazva kapjuk, hogy $U \subseteq W$. $\square$

Házi feladat

Mutassuk meg, hogy ha A és B komplex fölötti lineáris transzformációk, és $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns, és ezért van közös sajátvektoruk.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a $\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$ azonosságok

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W)$

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A(A^*(w)) = A^*(A(w))$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben, mert W ortogonális $W^\perp$-re,

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben, mert W ortogonális $W^\perp$-re,
és $V = W \oplus W^\perp$.

A diagonalizálhatóság bizonyítása

Tegyük fel, hogy $AA^* = A^*A$.
Indukcióval bizonyítunk $\dim(V)$ szerint. 1-dimenzióban igaz.
Az algebra alaptétele miatt $\mathbb{C}$-ben van λ sajátértéke A-nak.
Legyen W a hozzá tartozó sajátaltér (így $W \neq 0$).
Az előbbi Következmény miatt W sajátaltere A^*-nak is,
ezért W egyszerre A-invariáns és A^*-invariáns.
Emiatt $W^\perp$ A^*-invariáns és $(A^*)^* = A$-invariáns.
A és A^* a $W^\perp$ altéren is adjungáltak és felcserélhetők, mert a
$\langle w_1, A^*(w_2)\rangle = \langle A(w_1), w_2\rangle$ és $A\big(A^*(w)\big) = A^*\big(A(w)\big)$
azonosságok a $W^\perp$ altér vektoraira is öröklődnek.
Mivel $W \neq 0$, ezért $\dim(W^\perp) = \dim(V) - \dim(W) < \dim(V)$.
Az indukciós feltevés miatt van $W^\perp$-ban $b_{k+1}, \ldots, b_n$ ONB,
mely A sajátvektoraiból áll. Legyen $b_1, \ldots, b_k$ ONB W-ben.
Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ONB V-ben, mert W ortogonális $W^\perp$-re,
és $V = W \oplus W^\perp$. Ez a bázis A sajátvektoraiból áll. $\square$

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,

.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ONB,
amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ONB,
amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer,

.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ONB, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független, .

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ONB, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független, így bázis V-ben. .

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ONB, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független, így bázis V-ben. Normáljuk b_n-et.

Felső háromszögmátrix alak

Tétel (F8.5.15. Feladat)

Komplex fölött minden $A \in \mathrm{Hom}(V)$ transzformáció mátrixa alkalmas ortonormált bázisban felső háromszögmátrix.

Bizonyításvázlat

Legyen b_n nem nulla sajátvektora A^*-nak.
Ekkor a b_n által generált altér A^*-invariáns,
ezért a W ortogonális komplementer altere $(A^*)^* = A$-invariáns.
Az indukciós feltevés miatt W-ben van egy $b_1, \ldots, b_{n-1}$ ONB, amelyben az A (W-re vett megszorításának) mátrixa felső háromszögmátrix. Ekkor $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált rendszer, ezért független, így bázis V-ben. Normáljuk b_n-et.
HF: A kapott bázisban A mátrixa felső háromszögmátrix. □

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,
akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós,

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér,
akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.
Azt igazoltuk, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor.

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak, és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^{\perp}$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.
Azt igazoltuk, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor.
HF: $A = A^*$, $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w$

A főtengelytétel bizonyítása

Már láttuk, hogy ha A diagonalizálható, akkor szimmetrikus.
Megfordítva: tegyük föl, hogy A szimmetrikus, azaz $A^* = A$.
Legyen b ONB és $M = [A]_{\mathrm{b}}$, ekkor M szimmetrikus mátrix.
Mivel M valós mátrix, ezért önadjungált. Bizonyítottuk korábban, hogy ilyenkor a komplex sajátértékek mind valósak.
Tehát M karakterisztikus polinomjának gyökei valósak,
és így A-nak is van egy λ valós sajátértéke.
Ha v ehhez tartozó sajátvektor, és W az általa generált altér, akkor W A-invariáns, ezért $W^\perp$ $A^* = A$-invariáns.
Ezért hasonló indukció működik, mint normális transzformációkra.

Megjegyzés: Mivel M normális, komplexben diagonalizálható.
Minden sajátérték valós, ezért van hozzá valós sajátvektor is.
Azt igazoltuk, hogy van „elegendő” ortonormált valós sajátvektor.
HF: $A = A^*$, $Av = \lambda v$, $Aw = \mu w \implies \lambda = \mu$ vagy $v \perp w$.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,
és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni:

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy kúp.

A főtengelytétel elnevezés magyarázata

Miért nevezzük az előbbi eredményt főtengelytételnek?

Tekintsük az $x^2 + 2y^2 = 1$ egyenletű ellipszist a síkon.
A két tengely a két koordinátatengely, így merőlegesek.
A fenti egyenletet átírhatjuk skaláris szorzat segítségével.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$, ekkor $Mv = \begin{bmatrix} x \\ 2y \\ -1 \end{bmatrix}$,

és így $0 = x^2 + 2y^2 - 1 = \langle v, Mv \rangle$.
A két tengelyirány éppen M két sajátvektorának felel meg.
Hasonlóan felírhatunk minden másodfokú síkgörbét,
és a tengelyeket a mátrix sajátvektoraiként kapjuk.
Merőlegesek, mert a mátrixot szimmetrikusnak választhatjuk!
Jobb az $x^2 + 2y^2 = z^2$ egyenletet nézni: ez egy kúp.
Az ellipszist ebből a $z = 1$ sík metszi ki.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól. Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.
Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy
a negatív elemek száma sem függ a bázistól.
A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.
Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy
a negatív elemek száma sem függ a bázistól.
A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Bizonyítás

Elég belátni, hogy a pozitív elemek száma nem függ a bázistól.
Ezt ugyanis $-B$-re alkalmazva kapjuk, hogy a negatív elemek száma sem függ a bázistól.
A nullák számát a főátlóban pedig úgy kapjuk, hogy a pozitív és a negatív elemek számát kivonjuk a tér dimenziójából, tehát akkor a nullák száma sem függ a bázistól.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független,

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok).
Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \dots, v_k$ és $w_1, \dots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_j|^2 \leq 0\,.$$

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_j|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_j|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_j|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$.

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0\,.$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Ezért $\sum y_j w_j = 0$,

Lemma a tehetetlenségi tételhez*

Lemma

Legyen $v_1, \ldots, v_k$ és $w_1, \ldots, w_\ell$ két független, B-ortogonális vektorrendszer. Tegyük föl, hogy $B(v_i, v_i) > 0$ és $B(w_j, w_j) \leq 0$ minden i, j-re. Ekkor ezek a vektorok együtt is függetlenek.

Bizonyítás

Tegyük föl, hogy $\sum x_i v_i + \sum y_j w_j = 0$ (ahol x_i, y_j skalárok). Legyen $v = \sum x_i v_i$ és $w = \sum y_j w_j$, ekkor $v = -w$. Innen

$$B(v, v) = \sum B(v_i, v_i)|x_i|^2 \geq 0$$

$$B(w, w) = \sum B(w_j, w_j)|y_i|^2 \leq 0 .$$

De $B(v, v) = B(-w, -w) = B(w, w)$, így mindkét összeg nulla. Mivel $B(v_i, v_i) > 0$, ez csak úgy lehet, ha $x_1 = \ldots = x_k = 0$. Ezért $\sum y_j w_j = 0$, így a függetlenség miatt minden $y_j = 0$. □

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$,

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1), továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$.

A tehetetlenségi tétel bizonyítása*

Tegyük föl, hogy adott két B-ortogonális bázis.
Legyen $n = \dim(V)$, továbbá M_1 és M_2 a B mátrixa az első, illetve a második bázisban.
Jelölje k_1, illetve k_2 rendre az M_1, illetve M_2 főátlójában a pozitív elemek számát. Be kell látni, hogy $k_1 = k_2$.
Az M_i főátlójában nyilván $n - k_i$ nempozitív elem van.
Legyenek $v_1, \ldots, v_{k_1}$ az első bázisból azok a vektorok, melyekre $B(v_i, v_i) > 0$ (ezek száma tehát k_1),
továbbá $w_1, \ldots, w_{n-k_2}$ a második bázisból azok a vektorok, melyekre $B(w_j, w_j) \leq 0$ (ezek száma $n - k_2$).
A lemma miatt ezek együtt is függetlenek, így
$k_1 + (n - k_2) \leq \dim(V) = n$, ahonnan $k_1 \leq k_2$.
A két bázist megcserélve $k_2 \leq k_1$. $\square$

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi.

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathrm{d}/\mathrm{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathsf{d}/\mathsf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei,

Szinguláriusérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathsf{d}/\mathsf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok.

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathsf{d}/\mathsf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok. A pozitív szinguláris értékek az E féltengelyeinek hosszai.

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathsf{d}/\mathsf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok. A pozitív szinguláris értékek az E féltengelyeinek hosszai. Mátrixosan:

Legyen M komplex elemű mátrix. Ekkor léteznek olyan R és S unitér mátrixok, hogy $A = SDR^*$, ahol D diagonális mátrix.

Szinguláriisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathsf{d}/\mathsf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok. A pozitív szinguláris értékek az E féltengelyeinek hosszai. Mátrixosan:

Legyen M komplex elemű mátrix. Ekkor léteznek olyan R és S unitér mátrixok, hogy $A = SDR^*$, ahol D diagonális mátrix. Ha M valós, akkor R és S is választható valós, ortogonális mátrixnak.

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathrm{d}/\mathrm{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok. A pozitív szinguláris értékek az E féltengelyeinek hosszai. Mátrixosan:

Legyen M komplex elemű mátrix. Ekkor léteznek olyan R és S unitér mátrixok, hogy $A = SDR^*$, ahol D diagonális mátrix. Ha M valós, akkor R és S is választható valós, ortogonális mátrixnak.

Az S mátrix oszlopai bal-, az R oszlopai jobb szinguláris vektorai M-nek.

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathsf{d}/\mathsf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok. A pozitív szinguláris értékek az E féltengelyeinek hosszai. Mátrixosan:

Legyen M komplex elemű mátrix. Ekkor léteznek olyan R és S unitér mátrixok, hogy $A = SDR^*$, ahol D diagonális mátrix. Ha M valós, akkor R és S is választható valós, ortogonális mátrixnak.

Az S mátrix oszlopai bal-, az R oszlopai jobb szinguláris vektorai M-nek. Ezek MM^*, illetve M^*M sajátvektorai,

Szingulárisérték-felbontás*

Legyenek V és W euklideszi terek és $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ekkor V egységgömbjét A a W tér egy E ellipszoidjára képzi. Valóban:

Létezik olyan b ONB V-ben, és olyan d ONB W-ben, hogy a $D = [A]_{\mathsf{d}/\mathsf{b}}$ mátrix diagonális (de nem feltétlenül négyzetes).

A D főátlójában szereplő számok A szinguláris értékei, ezek komplex terek esetén is nemnegatív valós számok. A pozitív szinguláris értékek az E féltengelyeinek hosszai. Mátrixosan:

Legyen M komplex elemű mátrix. Ekkor léteznek olyan R és S unitér mátrixok, hogy $A = SDR^*$, ahol D diagonális mátrix. Ha M valós, akkor R és S is választható valós, ortogonális mátrixnak.

Az S mátrix oszlopai bal-, az R oszlopai jobb szinguláris vektorai M-nek. Ezek MM^*, illetve M^*M sajátvektorai, a szinguláris értékek pedig a megfelelő sajátértékek négyzetgyökei.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója. Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója. Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése. Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója. Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése. Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása.
Ha W A-invariáns, akkor $W^\perp$ A^*-invariáns.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója. Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése. Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása.
Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^{*}-invariáns.
Normális transzformáció sajátalterei.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója. Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése. Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása.
Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^*-invariáns.
Normális transzformáció sajátalterei.
Szingulárisérték-felbontási tétel*.

A 9. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Alterek direkt összege. Direkt és ortogonális kiegészítő altér. Invariáns altér. Szinguláris érték és vektor*.

Tételek

A direkt összeg jellemzése a felírás egyértelműségével. A direkt összeg bázisa és dimenziója. Direkt és ortogonális kiegészítő altér létezése. Invariáns alterek és mátrixok blokkfelbontása.
Ha W A-invariáns, akkor $W^{\perp}$ A^{*}-invariáns.
Normális transzformáció sajátalterei.
Szingulárisérték-felbontási tétel*.

Irodalom a szingulárisérték-felbontáshoz:

https://algebra.elte.hu/wp-content/uploads/2024/02/szingularis4.pdf