Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

8. előadás

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha b ONB

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha b ONB és $[A]_b$ diagonális,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha b ONB és $[A]_{\mathrm{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$,

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha b ONB és $[A]_b$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha b ONB és $[A]_{\mathrm{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós
(hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha b ONB és $[A]_{\mathrm{b}}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós
(hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).
A felcserélhető önmagával

Önadjungált transzformációk

Definíció (F8.5.4. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy komplex euklideszi téren.
Az A önadjungált, ha $A^* = A$.

Emlékeztető: Unitér transzformáció: $A^* = A^{-1}$.
Unitér $\iff$ normális, és minden sajátérték abszolút értéke 1.

Tétel (F8.5.1. Feladat)

Az A akkor és csak akkor önadjungált, ha normális,
és minden (komplex feletti) sajátértéke valós.

Bizonyítás: Ha b ONB és $[A]_\mathrm{b}$ diagonális, akkor $[A^*] = [A]$
azt jelenti, hogy minden λ sajátértékre $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz λ valós
(hiszen a komplex sajátértékek a mátrix főátlójának elemei).
A felcserélhető önmagával így $A^* = A \implies A$ normális. $\square$

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A **szimmetrikus**, ha $A^* = A$.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha b ONB és $[A]_{\mathrm{b}}$ diagonális,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha b ONB és $[A]_{\mathrm{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus,

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha b ONB és $[A]_{\mathrm{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció.

Szimmetrikus transzformációk

Definíció (F8.6.2. Definíció)

Legyen A lineáris transzformáció egy valós euklideszi téren.
Az A szimmetrikus, ha $A^* = A$.

Ez azt jelenti, hogy minden ortonormált bázisban a mátrixa önmagának transzponáltja, vagyis szimmetrikus mátrix.

F8.6.2. Főtengelytétel

Az A akkor és csak akkor diagonalizálható (valós felett) ortonormált bázisban, ha szimmetrikus.

A triviális irány bizonyítása

Ha b ONB és $[A]_{\mathrm{b}}$ diagonális, akkor ez a mátrix szimmetrikus, ezért A is szimmetrikus transzformáció.
A megfordítást a 9. előadáson bizonyítjuk.

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$.

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x, y) = (3/2)\frac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x - y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2\frac{(x + y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2)\frac{(x + y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x - y)^2}{2}.$$

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$:

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x, y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x, y) = (3/2)\frac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x - y)^2}{2};$$

$$Q_2(x, y) = 2\frac{(x + y)^2}{2};$$

$$Q_3(x, y) = (5/2)\frac{(x + y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x - y)^2}{2}.$$

$Q_1(x, y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x, y) \geq 0$ minden x, y-ra,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$:

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$: pozitív szemidefinit.

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$: pozitív szemidefinit.
$Q_3(x,y)$ értékkészlete $\mathbb{R}$:

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$: pozitív szemidefinit.
$Q_3(x,y)$ értékkészlete $\mathbb{R}$: indefinit.

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y)=x^2+xy+y^2$, $Q_2(x,y)=x^2+2xy+y^2$, $Q_3(x,y)=x^2+3xy+y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y)=(3/2)\frac{(x+y)^2}{2}+(1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y)=2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y)=(5/2)\frac{(x+y)^2}{2}-(1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y)>0$ kivéve ha $x=y=0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y)\geq 0$ minden x,y-ra, $Q_2(1,-1)=0$: pozitív szemidefinit.
$Q_3(x,y)$ értékkészlete $\mathbb{R}$: indefinit.
Hiszen $x+y=a$ és $x-y=b$ megoldható minden a,b-re

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$: pozitív szemidefinit.
$Q_3(x,y)$ értékkészlete $\mathbb{R}$: indefinit.
Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b-re
(mert az együtthatóvektorok $(1,1)$ és $(1,-1)$ bázist alkotnak),

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$: pozitív szemidefinit.
$Q_3(x,y)$ értékkészlete $\mathbb{R}$: indefinit.
Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b-re
(mert az együtthatóvektorok $(1,1)$ és $(1,-1)$ bázist alkotnak),
így $Q(x,y) = (5/4)a^2 - (1/4)b^2$,

Másodfokú polinom értékkészlete

Legyen $Q_1(x,y) = x^2 + xy + y^2$, $Q_2(x,y) = x^2 + 2xy + y^2$, $Q_3(x,y) = x^2 + 3xy + y^2$. Mi ezeknek az értékkészlete?

$$Q_1(x,y) = (3/2)\frac{(x+y)^2}{2} + (1/2)\frac{(x-y)^2}{2};$$

$$Q_2(x,y) = 2\frac{(x+y)^2}{2};$$

$$Q_3(x,y) = (5/2)\frac{(x+y)^2}{2} - (1/2)\frac{(x-y)^2}{2}.$$

$Q_1(x,y) > 0$ kivéve ha $x = y = 0$: pozitív definit.
$Q_2(x,y) \geq 0$ minden x, y-ra, $Q_2(1,-1) = 0$: pozitív szemidefinit.
$Q_3(x,y)$ értékkészlete $\mathbb{R}$: indefinit.
Hiszen $x + y = a$ és $x - y = b$ megoldható minden a, b-re (mert az együtthatóvektorok $(1,1)$ és $(1,-1)$ bázist alkotnak), így $Q(x,y) = (5/4)a^2 - (1/4)b^2$, ami minden valós értéket felvesz.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$v^T M_1 v$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x\big(x + (y/2)\big) + y\big((x/2 + y)\big)$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x\big(x + (y/2)\big) + y\big((x/2 + y)\big) = x^2 + xy + y^2$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x\big(x + (y/2)\big) + y\big((x/2 + y)\big) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x\big(x + (y/2)\big) + y\big((x/2 + y)\big) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$,

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v \rangle$.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v \rangle$.
Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v \rangle$.
Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.
Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2)\dfrac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\dfrac{(x - y)^2}{2}$.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.

Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v \rangle$.

Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.

Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2)\dfrac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\dfrac{(x - y)^2}{2}$.

M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$,

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v\rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v\rangle$.
Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.
Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2)\dfrac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\dfrac{(x - y)^2}{2}$.
M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v \rangle$.
Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.
Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2)\dfrac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\dfrac{(x - y)^2}{2}$.
M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.
M_1 megfelelő sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x\big(x + (y/2)\big) + y\big((x/2 + y)\big) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v \rangle$.
Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.
Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2)\dfrac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\dfrac{(x - y)^2}{2}$.
M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.
M_1 megfelelő sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.

Felírás mátrixszal és skaláris szorzással

$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $v = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$. Ekkor

$$v^T M_1 v = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x + (y/2) \\ (x/2) + y \end{bmatrix} =$$
$$= x(x + (y/2)) + y((x/2 + y)) = x^2 + xy + y^2 = Q_1(x, y).$$

Azaz $Q_1(x, y) = v^T M_1 v$ felírható mátrixszorzással.
Mivel $\langle u, v \rangle = u^T v$, ezért $Q_1(x, y) = \langle v, M_1 v \rangle$.
Fontos: M_1 szimmetrikus mátrix.
Láttuk: $Q_1(x, y) = (3/2)\dfrac{(x + y)^2}{2} + (1/2)\dfrac{(x - y)^2}{2}$.
M_1 sajátértékei $3/2$ és $1/2$, a fenti négyzetösszeg együtthatói.
M_1 megfelelő sajátvektorai $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$.
Ezek komponensei adják x és y együtthatóit a négyzetösszegben.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.

$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j} r_{ij}x_ix_j$, ahol $r_{ij}\in\mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2x_3+7x_3^2$.

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&4\\0&0&7\end{bmatrix}$,

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1,\dots,x_n)=\sum_{i,j} r_{ij}x_ix_j$, ahol $r_{ij}\in\mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2x_3+7x_3^2$.

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&4\\0&0&7\end{bmatrix}$, ekkor $Q=\langle v,Mv\rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j} r_{ij}x_ix_j$, ahol $r_{ij}\in\mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2x_3+7x_3^2$.

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&4\\0&0&7\end{bmatrix}$, ekkor $Q=\langle v,Mv\rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&2&7\end{bmatrix}$,

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{i,j} r_{ij}x_ix_j$, ahol $r_{ij}\in\mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+2x_1x_2+4x_2x_3+7x_3^2$.

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&2&0\\0&0&4\\0&0&7\end{bmatrix}$, ekkor $Q=\langle v,Mv\rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}$ és $M=\begin{bmatrix}1&1&0\\1&0&2\\0&2&7\end{bmatrix}$, ekkor $Q=\langle v,Mv\rangle$.

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Felírás mátrixszorzással:

Valós kvadratikus alak

Definíció (F7.3.1. Definíció)

Kvadratikus alak: homogén másodfokú polinom.
$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} x_i x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{R}$.

Példa: $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2x_3 + 7x_3^2$.

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

De Q felírható szimmetrikus mátrixszal is:

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q = \langle v, Mv \rangle$.

Felírás mátrixszorzással: $Q = v^T M v$ (HF).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$.

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_i y_j = v^T Mw$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_iy_j = v^T Mw$, így

$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j = v^T Mv$ (HF).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_i y_j = v^T Mw$, így

$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_i x_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i y_j = v^T M w$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij}x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum m_{ij}x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot,

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor

$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_iy_j = v^T Mw$, így

$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_ix_j = x_jx_i$, ezért a $\sum m_{ij}x_ix_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $m_{ij} + m_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_iy_j = v^T Mw$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_ix_j = x_jx_i$, ezért a $\sum m_{ij}x_ix_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $m_{ij} + m_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).
Ha $x_ix_j = x_jx_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij},

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_iy_j = v^T Mw$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_ix_j = x_jx_i$, ezért a $\sum m_{ij}x_ix_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $m_{ij} + m_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén). Ha $x_ix_j = x_jx_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij}, akkor legyen $m_{ij} = m_{ji} = r_{ij}/2$.

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j = v^T M w$, így
$\langle v, Mv \rangle = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j = v^T M v$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_i x_j = x_j x_i$, ezért a $\sum m_{ij} x_i x_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $m_{ij} + m_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).
Ha $x_i x_j = x_j x_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij}, akkor legyen $m_{ij} = m_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Kvadratikus alak mátrixos alakja

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$. Ekkor
$\langle v, Mw\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_iy_j = v^T Mw$, így
$\langle v, Mv\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_ix_j = v^T Mv$ (HF).

Megjegyzés: Mivel $x_ix_j = x_jx_i$, ezért a $\sum m_{ij}x_ix_j$ polinomból nem lehet egyértelműen visszakapni az M mátrixot, hanem csak $m_{ij} + m_{ji}$ van meghatározva ($i \neq j$ esetén).
Ha $x_ix_j = x_jx_i$ együtthatója a polinomban összevonva r_{ij}, akkor legyen $m_{ij} = m_{ji} = r_{ij}/2$. Ezzel beláttuk:

Minden (valós) kvadratikus alak egyértelműen felírható $\langle v, Mv\rangle = v^T Mv$ alakban, ahol M szimmetrikus mátrix.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$. Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$. Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle$.
De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle =$
$= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.

De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,

hiszen b_1, b_2 ortonormált.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 .$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle$.
De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle =$
$= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 .$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 .$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.
De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$,

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.
Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor
$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv \rangle = y_1 \langle b_1, Mv \rangle + y_2 \langle b_2, Mv \rangle$.
De $\langle b_1, Mv \rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2) \rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2 \rangle =$
$= \langle b_1, y_1 \lambda_1 b_1 + y_2 \lambda_2 b_2 \rangle = y_1 \lambda_1 \langle b_1, b_1 \rangle + y_2 \lambda_2 \langle b_1, b_2 \rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv \rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv \rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 .$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.
Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v \rangle$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor

$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.

De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v\rangle = b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2$.

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor $Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.

De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v\rangle = b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2$. Azaz

$$Q(x_1, x_2) = \lambda_1\left(b_{11}x_1 + b_{21}x_2\right)^2 + \lambda_2\left(b_{12}x_1 + b_{22}x_2\right)^2.$$

Négyzetösszeg alak és ONB

Adott egy $M \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrix, $Q(v) = \langle v, Mv\rangle$ a hozzá tartozó kvadratikus alak. A főtengelytétel miatt van sajátvektorokból álló b_1, b_2 ONB. Legyen $Mb_j = \lambda_j b_j$.

Ha $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$ a v felírása az új bázisban, akkor $Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \langle y_1 b_1 + y_2 b_2, Mv\rangle = y_1\langle b_1, Mv\rangle + y_2\langle b_2, Mv\rangle$.

De $\langle b_1, Mv\rangle = \langle b_1, M(y_1 b_1 + y_2 b_2)\rangle = \langle b_1, y_1 Mb_1 + y_2 Mb_2\rangle =$
$= \langle b_1, y_1\lambda_1 b_1 + y_2\lambda_2 b_2\rangle = y_1\lambda_1\langle b_1, b_1\rangle + y_2\lambda_2\langle b_1, b_2\rangle = \lambda_1 y_1$,
hiszen b_1, b_2 ortonormált. Ugyanígy $\langle b_2, Mv\rangle = \lambda_2 y_2$, ezért

$$Q(v) = \langle v, Mv\rangle = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2.$$

Legyen $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, $b_1 = \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{21} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} b_{12} \\ b_{22} \end{bmatrix}$.

Mivel $v = y_1 b_1 + y_2 b_2$, ezért $y_j = \langle b_j, v\rangle = b_{1j}x_1 + b_{2j}x_2$. Azaz

$$Q(x_1, x_2) = \lambda_1\left(b_{11}x_1 + b_{21}x_2\right)^2 + \lambda_2\left(b_{12}x_1 + b_{22}x_2\right)^2.$$

HF: Ugyanezt a számolást végezzük el $n \times n$-es mátrixra.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő

sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.
Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei,

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak. Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei, a $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ négyzetösszeg alakja tehát

$$-1\left(\frac{-x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0\left(\frac{-y+z}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{2x+y+z}{\sqrt{6}}\right)^2.$$

Példa négyzetösszeg alakra

Legyen $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ kvadratikus alak.

A hozzá tartozó szimmetrikus mátrix $M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

$k_M(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 2\lambda$, a sajátértékek -1, 0, 2, a megfelelő sajátvektorok $b_1 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}$, $b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$, $b_3 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{bmatrix}$.

Ezeket már normáltuk, és automatikusan páronként ortogonálisak.
Láttuk, hogy x, y, z együtthatói rendre b_1, b_2 és b_3 komponensei, a $Q(x,y,z) = x^2 + 2xy + 2xz$ négyzetösszeg alakja tehát

$$-1\left(\frac{-x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 + 0\left(\frac{-y+z}{\sqrt{2}}\right)^2 + 2\left(\frac{2x+y+z}{\sqrt{6}}\right)^2.$$

Ellenőrzés: A műveletek elvégzésével azonosságot kapunk.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

(4) Q negatív szemidefinit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékre nempozitív, és van közte 0.)

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékre nempozitív, és van közte 0.)

(5) Q indefinit,

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v) Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékre nempozitív, és van közte 0.)

(5) Q indefinit, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.

Kvadratikus alak karaktere

F7.3.2 Definíció, F7.3.3 Tétel

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).

(1) Q pozitív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) > 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke pozitív.)

(2) Q negatív definit, ha $v \neq 0 \implies Q(v) < 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke negatív.)

(3) Q pozitív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v)Q(v) \geq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértéke nemnegatív, és van közte 0.)

(4) Q negatív szemidefinit, ha nem definit és $(\forall v)Q(v) \leq 0$.
(Az M mátrix minden sajátértékre nempozitív, és van közte 0.)

(5) Q indefinit, ha pozitív és negatív értéket is felvesz.
(Az M mátrixnak van pozitív és van negatív sajátértéke is.)

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T Mv = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,
azaz $d_k > 0$ ha k páros

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,
azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,
azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,
azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,
azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$). Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha
$d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább,
azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

A Q_1 pozitív definit, mert $1 > 0$

Kvadratikus karakter és aldeterminánsok

Tétel (F7.3.4 Tétel, NB)

Legyen $Q \neq 0$ (valós feletti) kvadratikus alak és $M \neq 0$ a hozzá tartozó szimmetrikus mátrix ($Q(v) = v^T M v = \langle v, Mv \rangle$).
Jelölje d_k az M mátrix első k sorából és első k oszlopából készített részmátrix (más néven minor) determinánsát.

(1) A Q pontosan akkor pozitív definit, ha minden $d_k > 0$.

(2) A Q pontosan akkor negatív definit, ha $d_1 < 0$, $d_2 > 0$, $d_3 < 0$, és így tovább, azaz $d_k > 0$ ha k páros és $d_k < 0$ ha k páratlan.

Ezt könnyű ellenőrizni, ha M diagonális (HF).

Példa: $M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix}$ és $Q_1(x, y) = x^2 + xy + y^2$.

A Q_1 pozitív definit, mert $1 > 0$ és $\det(M_1) = 3/4 > 0$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon. Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk M-et ONB-ben,

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk M-et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.
Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk M-et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ.
Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.
Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk M-et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ.
Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.
Ez akkor ellipszis, ha λ és μ pozitív.

Illusztráció másodrendű görbékkel

Tétel (Hajós: Bevezetés a geometriába, 47. §, NB).

Tekintsük az $ax^2 + by^2 + cxy = 1$ egyenletű görbét a síkon.
Ha a bal oldali kvadratikus alak

(1) pozitív definit, akkor a görbe ellipszis.
Ez akkor teljesül, ha $a > 0$ és $c^2 < 4ab$.

(2) indefinit, akkor a görbe hiperbola.
Ez akkor teljesül, ha $c^2 > 4ab$.

Magyarázat: A fenti kvadratikus alak mátrixa $M = \begin{bmatrix} a & c/2 \\ c/2 & b \end{bmatrix}$.

Ennek determinánsa $ab - c^2/4$, így karaktere leolvasható.
Diagonalizáljuk M-et ONB-ben, a sajátértékek legyenek λ és μ.
Az új koordinátarendszerben az egyenlet $\lambda x^2 + \mu y^2 = 1$.
Ez akkor ellipszis, ha λ és μ pozitív.
A λ és μ akkor ellentétes előjelű, ha $\det(M) = \lambda\mu < 0$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak:

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \overline{x_i} x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1} x_1 + i\,\overline{x_1} x_2 - i\,\overline{x_2} x_1 + 7\,\overline{x_2} x_2$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle$

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv\rangle = v^* Mv$,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^*Mv$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \overline{x_i} x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1} x_1 + i\,\overline{x_1} x_2 - i\,\overline{x_2} x_1 + 7\,\overline{x_2} x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* M v$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i\,\overline{x_1} x_2 - i\,\overline{x_2} x_1 + 7\,|x_2|^2$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,|x_2|^2$.

Q értékészlete valós,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,|x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij}\overline{x_i}x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1}x_1 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,\overline{x_2}x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* Mv$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1 + 7\,|x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,

$i\,\overline{x_1}x_2 - i\,\overline{x_2}x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \overline{x_i} x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1} x_1 + i\,\overline{x_1} x_2 - i\,\overline{x_2} x_1 + 7\,\overline{x_2} x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* M v$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i\,\overline{x_1} x_2 - i\,\overline{x_2} x_1 + 7\,|x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,

$i\,\overline{x_1} x_2 - i\,\overline{x_2} x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).

A fenti M mátrix önadjungált, azaz $M^* = M$.

Komplex kvadratikus alak

Definíció (F7.4. szakasz)

Komplex kvadratikus alak: $Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i,j} r_{ij} \overline{x_i} x_j$, ahol $r_{ij} \in \mathbb{C}$.

Példa: $Q(x_1, x_2) = \overline{x_1} x_1 + i\, \overline{x_1} x_2 - i\, \overline{x_2} x_1 + 7\, \overline{x_2} x_2$. Legyen

$v = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ és $M = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 7 \end{bmatrix}$, ekkor $Q(v) = \langle v, Mv \rangle = v^* M v$,

(komplex skaláris szorzatnál az első komponenseket konjugáljuk).

Nyilván $Q(x_1, x_2) = |x_1|^2 + i\, \overline{x_1} x_2 - i\, \overline{x_2} x_1 + 7\, |x_2|^2$.

Q értékészlete valós, mert $|x_1|^2$ és $|x_2|^2$ valós,

$i\, \overline{x_1} x_2 - i\, \overline{x_2} x_1$ konjugáltja pedig önmaga (HF).

A fenti M mátrix önadjungált, azaz $M^* = M$.

Tétel (F7.4. szakasz, HF)

$Q(v) = \langle v, Mv \rangle$ értékkészlete valós $\iff$ M önadjungált.

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékkészlete valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékkészlete valós.

(2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékkészlete valós.

(2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékkészlete valós.

(2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

(3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékkészlete valós.

(2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

(3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix determinánsa valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!

Kvadratikus karakter komplex fölött

Legyen $0 \neq M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ önadjungált mátrix és Q a hozzá tartozó kvadratikus alak: $Q(v) = v^* M v = \langle v, Mv \rangle$.

(1) A Q kvadratikus karakterét ugyanúgy definiáljuk, mint a valós esetben.
Értelmes, mert Q értékkészlete valós.

(2) A kvadratikus karakter sajátértékekkel való jellemzése ugyanúgy érvényes, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix sajátértékei valósak.

(3) Az, hogy a kvadratikus alak mikor pozitív (negatív) definit, ugyanúgy olvasható le a bal felső sarokdeterminánsokról, mint a valós esetben.
Értelmes, mert önadjungált mátrix determinánsa valós.

Egyenlőtlenséget csak valós számok között írhatunk föl!
Általános komplex kvadratikus alak karakteréről nem beszélhetünk.

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$,

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$.

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw\rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij}x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v, w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u + v, w) = B(u, w) + B(v, w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v, w)$.

(3) $B(w, u + v) = B(w, u) + B(w, v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w, v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v, w) = B(w, v)$ (azaz B szimmetrikus).

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,
továbbá $B(v,w) = \langle v, Mw\rangle = v^T M w = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$.
Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u+v,w) = B(u,w) + B(v,w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v,w)$.

(3) $B(w, u+v) = B(w,u) + B(w,v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w,v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v,w) = B(w,v)$ (azaz B szimmetrikus).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása

Algebrai tulajdonságok*

Legyen $M = ((m_{ij})) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $v = \begin{bmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$ és $w = \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix}$,

továbbá $B(v,w) = \langle v, Mw \rangle = v^T Mw = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$.

Ekkor tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén (HF):

(1) $B(u+v, w) = B(u,w) + B(v,w)$.

(2) $B(\lambda v, w) = \lambda B(v,w)$.

(3) $B(w, u+v) = B(w,u) + B(w,v)$.

(4) $B(w, \lambda v) = \lambda B(w,v)$.

(5) Ha M szimmetrikus mátrix, akkor $B(v,w) = B(w,v)$ (azaz B szimmetrikus).

Ez tehát a valós skaláris szorzat egy általánosítása (ott M az egységmátrix).

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény.

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \dots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \dots + x_n b_n$

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v,w) = B(w,v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v,v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris,
ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v,w) = B(w,v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v,v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v,w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$, ahol $m_{ij} = B(b_i, b_j)$,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$, ahol $m_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j$.

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$, ahol $m_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i x_j$.
A B pontosan akkor szimmetrikus,

Valós bilineáris függvény*

Definíció (F7.1.1. Definíció)

Legyen V vektortér $\mathbb{R}$ fölött és B kétváltozós, V-n értelmezett, $\mathbb{R}$-be képező függvény. A B függvény bilineáris, ha mindkét változóban lineáris (az iménti (1)–(4) tulajdonság).
A B szimmetrikus, ha $B(v, w) = B(w, v)$ minden v, w-re.
$Q(v) = B(v, v)$ a B-hez tartozó kvadratikus alak ($Q : V \to \mathbb{R}$).

Állítás (HF)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben,
$v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$, ahol $m_{ij} = B(b_i, b_j)$,
továbbá $Q(v) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i x_j$.
A B pontosan akkor szimmetrikus, ha $m_{ij} = m_{ji}$ minden i, j-re.

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben.

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathrm{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathrm{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathrm{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény,

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_{\mathrm{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathrm{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathrm{b}} = \left(\left(B(b_i, b_j)\right)\right)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$ definiál,

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_\mathrm{b} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((m_{ij}))$. $\square$

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_{\mathrm{b}} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((m_{ij}))$. $\square$

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény **mátrixa** ebben a bázisban $[B]_\mathrm{b} = ((B(b_i, b_j)))$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((m_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).
A $Q(v) = B(v, v) = \sum m_{ij} x_i x_j$ „absztrakt” kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható,

Bilineáris függvény mátrixa*

Definíció (F7.1.3. Definíció)

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis V-ben. Ekkor a B bilineáris függvény mátrixa ebben a bázisban $[B]_\mathrm{b} = \big(\big(B(b_i, b_j)\big)\big)$.

Tétel (F7.1.4. Tétel)

B-t a mátrixa egyértelműen meghatározza.
Megfordítva, minden M mátrixhoz tartozik bilineáris függvény, amit $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$ esetén $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} x_i y_j$ definiál, ahol $M = ((m_{ij}))$. □

A lineáris leképezések előírhatósági tételére hasonlít (F5.3.1).
A $Q(v) = B(v, v) = \sum m_{ij} x_i x_j$ „absztrakt" kvadratikus alak több bilineáris függvényből is származtatható, és ezek között pontosan egy lesz szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér,

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathbf{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n,

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathrm{b}} = M$,

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathrm{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathrm{b}} = M$.

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathrm{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathrm{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus,

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathrm{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathrm{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((m_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = m_{ij}$,

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((m_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = m_{ij}$, mert b ONB.

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w)\rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((m_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j)\rangle = m_{ij}$, mert b ONB.
Legyen $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_{\mathrm{b}} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_{\mathrm{b}} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((m_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = m_{ij}$, mert b ONB.
Legyen $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.

Bilineáris és lineáris függvény*

Következmény

Legyen V valós euklideszi tér, $\mathrm{b} = b_1, \ldots, b_n$ ONB,
B bilineáris függvény V-n, $[B]_\mathrm{b} = M$,
és A az a lineáris transzformáció V-n, melyre $[A]_\mathrm{b} = M$.
Ekkor tetszőleges $v, w \in V$ esetén $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$.
Ez a kapcsolat kölcsönösen egyértelmű
a bilineáris függvények és V lineáris transzformációi között.
B akkor és csak akkor szimmetrikus, ha M szimmetrikus,
akkor és csak akkor, ha A szimmetrikus.

Bizonyítás

Ha $M = ((m_{ij}))$, akkor $\langle b_i, A(b_j) \rangle = m_{ij}$, mert b ONB.
Legyen $v = x_1 b_1 + \ldots + x_n b_n$ és $w = y_1 b_1 + \ldots + y_n b_n$.
Ekkor $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n m_{ij} x_i y_j$. $\square$

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$,

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a m_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza.

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a m_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a m_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle:

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a m_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a m_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.
Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa önadjungált,

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a m_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.
Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa önadjungált, vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$,

Komplex bilineáris függvény*

Változások a valóshoz képest (F7.4. szakasz)

A bilineáris függvény definíciójában $B(\lambda v, w) = \overline{\lambda} B(v, w)$.
Emiatt $B(v, w) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} y_j$ és
$Q(v) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} \overline{x_i} x_j$.
Itt $\overline{x_i} x_j \neq \overline{x_j} x_i$, ezért a m_{ij} együtthatót már a kvadratikus alak is egyértelműen meghatározza. Vagyis minden kvadratikus alak pontosan egy bilineáris függvényből származik.

F7.1.4. Tétel (HF, nem bizonyítjuk)

Komplex felett a B bilineáris függvényhez tartozó $B(v, v)$ kvadratikus alak értékkészlete akkor és csak akkor valós, ha B Hermite-féle: minden $v, w \in V$-re $B(v, w) = \overline{B(w, v)}$.
Ezek pontosan azok, amelyek mátrixa önadjungált,
vagyis $B(v, w) = \langle v, A(w) \rangle$, ahol A önadjungált transzformáció.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak,

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális,

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális,

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, bilineáris függvény.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \dots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \dots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció,

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.

B-ortogonalitás*

Definíció (F7.2.4. Definíció)

Legyen B bilineáris függvény a V vektortéren.
A $v, w \in V$ vektorok B-ortogonálisak, ha $B(v, w) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis B-ortogonális, ha $i \neq j \implies B(b_i, b_j) = 0$.
A $b_1, \ldots, b_n$ bázis nyilván pontosan akkor B-ortogonális, ha B mátrixa ebben a bázisban diagonális.

Tétel (F7.2.3. Tétel)

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Ekkor létezik B-ortogonális bázis.
Ha V euklideszi tér, akkor van B-ortogonális ONB is.

Bizonyítás: háromféle eljárás (lásd Freud: 7.2. Szakasz).
Módosított Gauss-elimináció, illetve Gram-Schmidt módszer.
B-ortogonális ONB keresése: sajátértékek segítségével.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus,
bilineáris függvény,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re;

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v,w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw\rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v,w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.
Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.
Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.
Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle$

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.
Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$,

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw \rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.
Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j \rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j \rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$.

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v, w) = \langle v, Aw\rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.
Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j\rangle = \lambda_j\langle b_i, b_j\rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. A főátló elemei $B(b_i, b_i) = \lambda_i$. $\square$

Ortogonalizálás ONB-ben

Tétel

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény, és A a hozzá tartozó lineáris transzformáció (az, amelyre $B(v,w) = \langle v, Aw\rangle$ alkalmas $A \in \mathrm{Hom}(V)$-re; az A valósban szimmetrikus, komplexben önadjungált).
Ekkor A ONB-ben diagonalizálható (valósban főtengelytétel).
Legyen $b_1, \ldots, b_n$ ilyen ONB. Ekkor ez a bázis B-ortogonális, azaz B-nek e bázisban vett M mátrixa diagonális.
Az M főátlójában A sajátértékei állnak.

Bizonyítás

Ha $Ab_j = \lambda_j b_j$, akkor $B(b_i, b_j) = \langle b_i, Ab_j\rangle = \lambda_j \langle b_i, b_j\rangle$, és ez nulla, ha $i \neq j$. A főátló elemei $B(b_i, b_i) = \lambda_i$. □

E bázisban a B-hez tartozó kvadratikus alak négyzetösszeggé válik.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \dots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad, mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j)$

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad, mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad, mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,
de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1)$

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad,
mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,
de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad, mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$, de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$, vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad,
mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$,
de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$,
vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.
Így a főátló elemeinek nagysága megváltozhat

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad, mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$, de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$, vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.
Így a főátló elemeinek nagysága megváltozhat (de az előjele nem).

A tehetetlenségi tétel*

F7.2.6. Sylvester tehetetlenségi tétele

Legyen B valósban szimmetrikus, komplexben Hermite-féle bilineáris függvény. Bárhogy veszünk egy B-ortogonális bázist, az ebben felírt mátrix főátlójában szereplő pozitív, nulla és negatív elemek száma csak B-től függ, a bázistól nem.

Megjegyzés

Legyen $b_1, \ldots, b_n$ egy B-ortogonális bázis.
Ha b_1 helyett $-2b_1$-et veszünk, akkor is B-ortogonális marad, mert $B(-2b_1, b_j) = -2B(b_1, b_j) = 0$, ha $j \neq 1$, de $B(-2b_1, -2b_1) = (-2)(-2)B(b_1, b_1) = 4B(b_1, b_1)$, vagyis a mátrix főátlójában lévő elem 4-szeresére nő.
Így a főátló elemeinek nagysága megváltozhat (de az előjele nem).
HF (F7.2.5. Tétel): elérhető, hogy a főátlóban csak 0, 1, -1 álljon.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak:

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény*:

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény*: szimmetrikus,

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal.
Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós*.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós. Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós*. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről,

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós. Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal. Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós*. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa;
a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal.
Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle,
ha a kvadratikus alak értékkészlete valós*. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról.
B-ortogonális bázis*, illetve ONB létezése;

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere.
Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa;
a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\Longleftrightarrow$ normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal.
Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle,
ha a kvadratikus alak értékkészlete valós*. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról.
B-ortogonális bázis*, illetve ONB létezése; négyzetösszeg alak.

A 8. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Önadjungált és szimmetrikus transzformáció. Kvadratikus alak: megadása skaláris szorzattal és mátrixszorzással; karaktere. Bilineáris függvény*: szimmetrikus, Hermite-féle; mátrixa; a hozzá tartozó lineáris transzformáció; B-ortogonalitás*.

Tételek

Önadjungált $\iff$ normális és minden komplex sajátérték valós.
Kvadratikus alak egyértelmű megadása szimmetrikus mátrixszal.
Komplex bilineáris függvény pontosan akkor Hermite-féle, ha a kvadratikus alak értékkészlete valós*. A kvadratikus karakter leolvasása a sajátértékekről, aldeterminánsokról.
B-ortogonális bázis*, illetve ONB létezése; négyzetösszeg alak.
Sylvester tehetetlenségi tétele.*