Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

6. előadás

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus,

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük:

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az.

Diagonalizálható transzformációk

Legyen V véges dimenziós vektortér T fölött és $A \in \mathrm{Hom}(V)$.

Tétel (F6.6.1. Feladat)

Pontosan akkor létezik olyan bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A minimálpolinomja gyöktényezők szorzatára bomlik T fölött, és minden gyöke egyszeres.

Főtengelytétel (F8.6.2. Tétel)

Ha $T = \mathbb{R}$, akkor pontosan akkor létezik olyan ortonormált bázis V-ben, melyben A mátrixa diagonális, ha A ortonormált bázisban vett mátrixa szimmetrikus, azaz $[A]^T = [A]$.

A szimmetria szempontjából mindegy, melyik ONB-t vesszük: ha az egyikben A mátrixa szimmetrikus, akkor mindben az.
A főtengelytételt a 9. előadáson bizonyítjuk.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,
így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy
a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,
így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy
a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$,

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával. Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk: $k_M(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz, így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ páronként különbözők (az M főátlójának elemei).

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,
így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy
a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ páronként
különbözők (az M főátlójának elemei).

A megfordítás kulcsa az F6.6.2. Tétel (nem bizonyítjuk).

A diagonalizálhatóság jellemzésének bizonyítása

Állítás

Transzformáció minimálpolinomja megegyezik
a (tetszőleges bázisban vett) mátrixának a minimálpolinomjával.
Ezért hasonló mátrixok minimálpolinomja ugyanaz.

Valóban, minden f polinomra $[f(A)] = f([A])$ (HF).

Minden diagonalizálható mátrix hasonló egy diagonális mátrixhoz,
így az előző állítás miatt elég diagonális mátrixra bizonyítani, hogy
a minimálpolinomja különböző gyöktényezők szorzatára bomlik.
Ha M diagonális, akkor k_M minimálpolinomját kiszámoltuk:
$k_M(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in T$ páronként
különbözők (az M főátlójának elemei).

A megfordítás kulcsa az F6.6.2. Tétel (nem bizonyítjuk). Az ebben
szereplő direkt összegről a 9. előadáson lesz szó.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix},$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} =$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \qquad 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x + 4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x + 4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

A geometriai multiplicitás kisebb,

Nem diagonalizálható mátrixok

A véges Markov-folyamatok kiszámításához mátrixot kell hatványozni. Ezt a mátrix diagonalizálásával végeztük el.
Mit tehetünk, ha a mátrix nem diagonalizálható?

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad k_m(x) = (-x)(4-x) + 4 = x^2 - 4x + 4.$$

Ez $(x-2)^2$, az egyetlen sajátérték a 2. Sajátvektorok:

$$\begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4y \\ x+4y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \iff x = -2y.$$

A sajátaltér az $r \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ vektorokból áll, tehát egydimenziós.

A geometriai multiplicitás kisebb, így M nem diagonalizálható.

Szebb alak

A példa folytatása

$$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$ nem diagonalizálható.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$,

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix},$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS$$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális,

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval):

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:

Szebb alak

A példa folytatása

$M = \begin{bmatrix} 0 & -4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ nem diagonalizálható.

Legyen $b_1 = \begin{bmatrix} 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ és $b_2 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$. E bázisba transzformálva

$$S = \begin{bmatrix} 7 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 7 \end{bmatrix}, \quad N = S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ez nem diagonális, de tudjuk hatványozni!

HF (k szerinti indukcióval): $N^k = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}$.

Innen $M^k = SN^kS^{-1}$ is kiszámítható:

$$M^k = \begin{bmatrix} 2^k - 2k2^{k-1} & -4k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^k + 2k2^{k-1} \end{bmatrix}.$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó **Jordan-blokk**:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó **Jordan-blokk**:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1,

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1, másutt 0.

Jordan-blokk

Definíció

Az $m \times m$-es, λ-hoz tartozó Jordan-blokk:

$$J_{\lambda,m} = \begin{bmatrix} \lambda & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \lambda & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & \lambda \end{bmatrix} = N + \lambda E \in \mathbb{C}^{m \times m}.$$

A főátló végig λ, alatta az átlóval párhuzamosan 1, másutt 0.

Gyakorlaton láttuk Algebra1-ből

N^j a főátló alatti j-edik „átlóban” 1, másutt 0.
Speciálisan $N^j = 0$, ha $j \geq m$.

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú,

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek,

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Jordan-normálalak

Definíció

Az $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakú, ha a diagonálisában Jordan-blokkok szerepelnek, a többi eleme nulla.

Példa:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű:

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott

az,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott
az, hogy a kapott
Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot,

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist.

Jordan tétele

Tétel (Kiss-jegyzet, 7.6.5. Tétel)

Minden $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix Jordan-alakra hozható bázistranszformációval. Ez esetleg többféleképpen is lehetséges, a kapott Jordan-féle normálalak azonban egyértelmű: csak a blokkok sorrendje változhat.
Azaz minden λ és m esetén egyértelműen meghatározott (nem függ a választott új bázistól) az, hogy a kapott Jordan-alakú mátrixban hány darab $J_{\lambda,m}$ blokk szerepel.
FONTOS: Minden diagonális mátrix Jordan-alakú!

Bizonyítás: Algebra3-4-ben, de nem minden szakirányon.
Lásd: Kiss-jegyzet, 7.6.6. Tétel és 7.4.5. Lemma.
A jegyzetben egy algoritmus is szerepel arra, hogy hogyan lehet megtalálni a Jordan-alakot, és a hozzá tartozó bázist.
Haszna: van képlet a Jordan-alak hatványozására (később).

Minimálpolinom és Jordan-alak

Tétel

Az M mátrix minimálpolinomjában az $(x - \lambda)$ gyöktényező kitevője a legnagyobb λ-hoz tartozó Jordan-blokk mérete.

Minimálpolinom és Jordan-alak

Tétel

Az M mátrix minimálpolinomjában az $(x-\lambda)$ gyöktényező kitevője a legnagyobb λ-hoz tartozó Jordan-blokk mérete. Például

$$M = \begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

minimálpolinomja $m_M(x) = (x-2)(x-3)(x-1)^3x^2$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Mivel $M^2 = 0$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$,

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es,

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es,
emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.
Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.
Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \text{illetve} \qquad N : \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Példák a Jordan-alak kiszámítására

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
Mivel $M^2 = 0$ de $N^2 \neq 0$, ezért $m_M(x) = x^2$ és $m_N(x) = x^3$.
Csak az egyetlen 0 sajátértékhez tartozó blokkok szerepelhetnek.
Az M Jordan alakjában a legnagyobb blokkméret 2×2-es, emellé már csak egy darab 1×1-es blokk fér el.
Az N Jordan alakjában egy darab 3×3-as blokk van.
Ezért a megfelelő Jordan-alakok a következők.

$$M: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ vagy } \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad N: \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az első két mátrix hasonló, a blokkok sorrendjében különböznek.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok,

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98}$$

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98}$$

(A felső blokk 90°-os forgatás!)

Diagonális blokkmátrix hatványozása

Állítás (HF)

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} D_1^k & 0 & \dots & 0 \\ 0 & D_2^k & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & D_n^k \end{bmatrix}.$$

Itt $D_1, \dots, D_n$ tetszőleges, nem feltétlenül egyforma méretű mátrixok, melyeken kívül minden elem nulla.

Példa

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & i \end{bmatrix}^{98} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$ (A felső blokk 90°-os forgatás!)

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k =$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló" végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető,

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló" végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J^k_{\lambda,m}$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k =$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N$

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert
$N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$.

A Jordan-alak hatványozása

Állítás

$J_{\lambda,m}^k$ főátlója felett nulla áll;
a főátló alatti j-edik „átló” végig $\binom{k}{j}\lambda^{k-j}$ (ahol $j \geq 0$).

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^k = \begin{bmatrix} 2^k & 0 & 0 \\ k2^{k-1} & 2^k & 0 \\ 2^{k-2}k(k-1)/2 & k2^{k-1} & 2^k \end{bmatrix}.$$

Bizonyítás

$J_{\lambda,m} = N + \lambda E$. Itt N és λE felcserélhető, mert $N(\lambda E) = \lambda N = (\lambda E)N$. Így alkalmazható a binomiális tétel:
$(\lambda E + N)^k = (\lambda E)^k + k(\lambda E)^{k-1}N + \ldots + \binom{k}{j}(\lambda E)^{k-j}N^j + \ldots$.
Használjuk föl N^j ismert szerkezetét. □

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ **rangja** a képtér dimenziója:

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel (Biz.: Algebra és Számelmélet, 18. dia)

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel (Biz.: Algebra és Számelmélet, 18. dia)

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja,

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel (Biz.: Algebra és Számelmélet, 18. dia)

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja, jele $r(M)$.

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel (Biz.: Algebra és Számelmélet, 18. dia)

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja, jele $r(M)$.

Tétel (F5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja:

Lineáris leképezés és mátrix rangja

Új definíció

$A \in \mathrm{Hom}(V, W)$ rangja a képtér dimenziója: $r(A) = \dim \mathrm{Im}(A)$.

Régi definíció, F3.4.1: Az M mátrix oszloprangja az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja. Az M sorrangja a soraiból álló vektorrendszer rangja.

F3.4.2. Tétel (Biz.: Algebra és Számelmélet, 18. dia)

Minden M mátrixnak megegyezik a sor- és oszloprangja.
Ez a mátrix rangja, jele $r(M)$.

Tétel (F5.7.11. Feladat)

Egy lineáris leképezés rangja ugyanaz, mint tetszőleges bázispárban felírt mátrixának az oszloprangja: $r(A) = r([A])$.

Összeg rangja

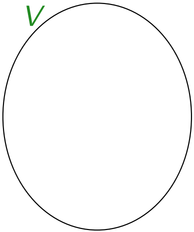
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.

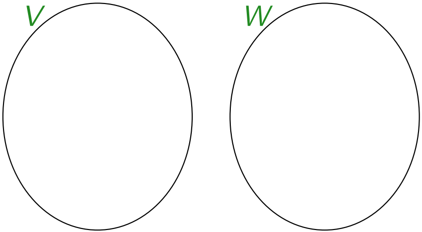
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



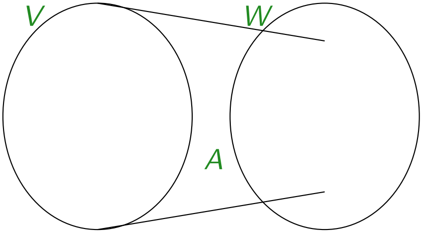
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



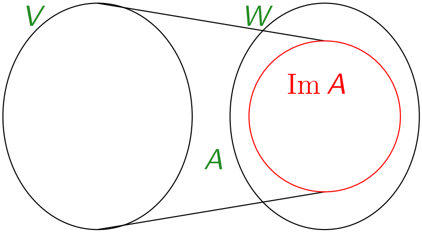
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



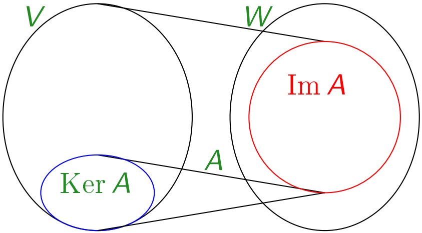
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



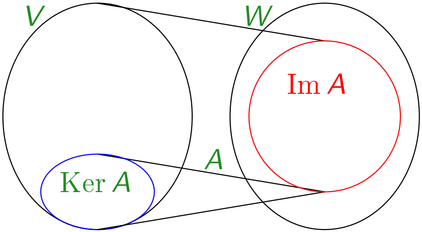
Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



Összeg rangja

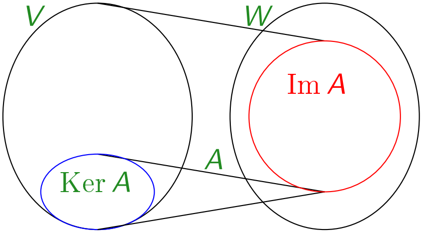
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$

Összeg rangja

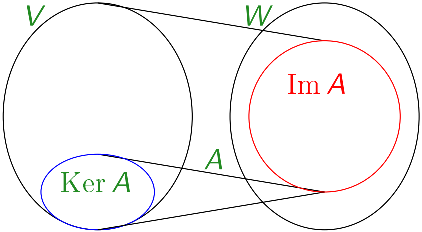
Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$
$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



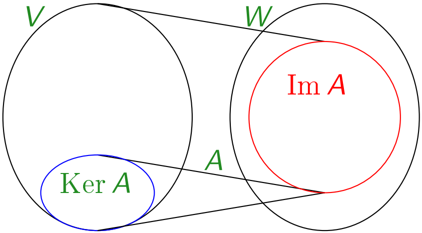
$$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$$

$$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$$

$$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$

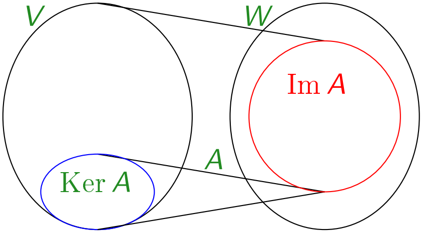
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \le \dim V$ és $r(A) \le \dim W$.



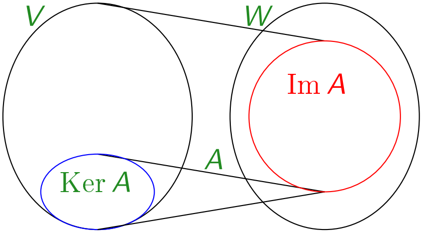
$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \le \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \le \dim W$

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \le r(A) + r(B)$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

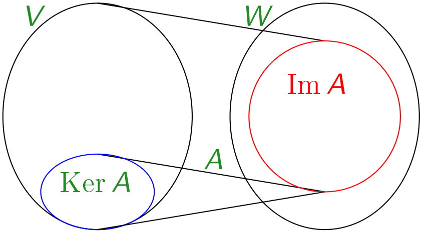
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \le \dim V$ és $r(A) \le \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \le \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \le \dim W$

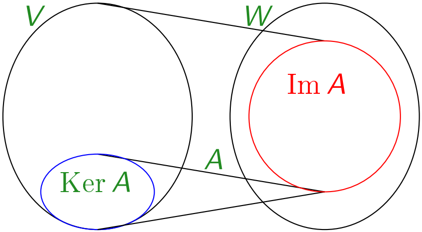
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \le r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$. HF: $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$

$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

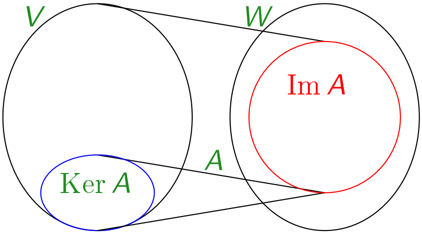
Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$. HF: $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,

Összeg rangja

Ha $A \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A) \leq \dim V$ és $r(A) \leq \dim W$.



$\dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Ker}\, A = \dim V$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim V$

$\mathrm{Im}\, A \subseteq W$
$\implies r(A) = \dim \mathrm{Im}\, A \leq \dim W$

Ha $A, B \in \mathrm{Hom}(V, W)$, akkor $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$.

A bizonyítás gondolata

$r(A + B) = \dim \mathrm{Im}(A + B)$. HF: $\mathrm{Im}(A + B) \subseteq \mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B$.
$\dim(\mathrm{Im}\, A + \mathrm{Im}\, B) \leq \dim \mathrm{Im}\, A + \dim \mathrm{Im}\, B = r(A) + r(B)$,
mert $\dim(U + V) = \dim U + \dim V - \dim(U \cap V)$. $\square$

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre,

Szorzat rangja

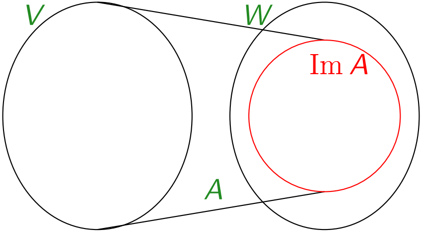
Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

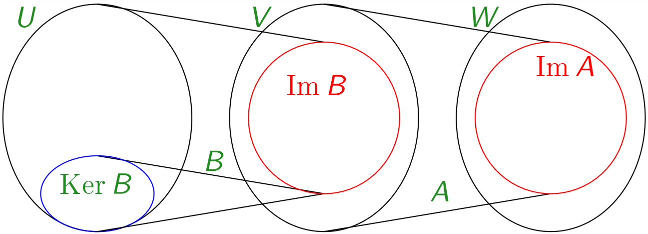
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

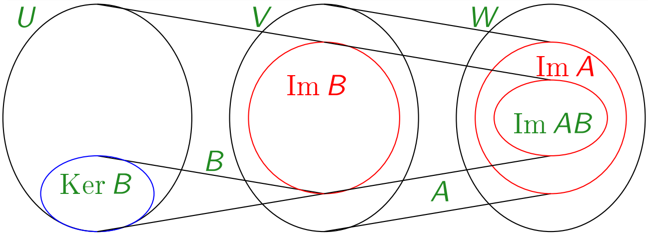
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

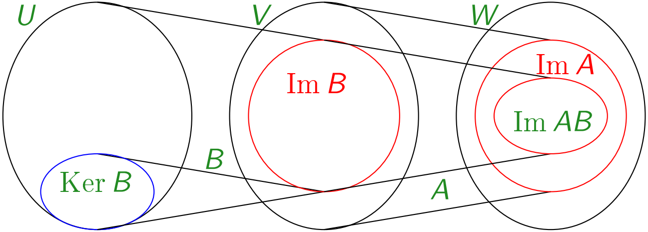
$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



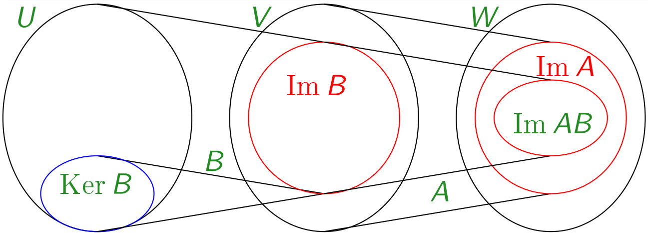
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



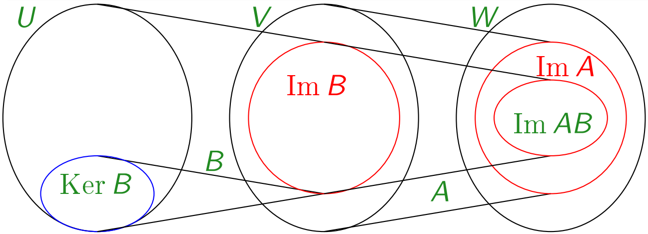
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás

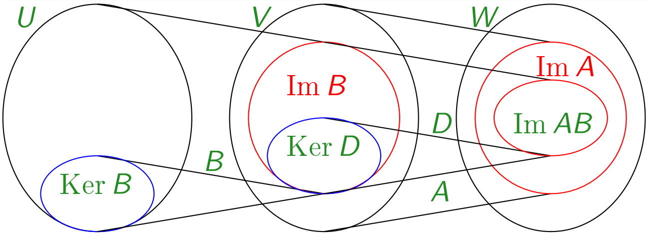
Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.

Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás

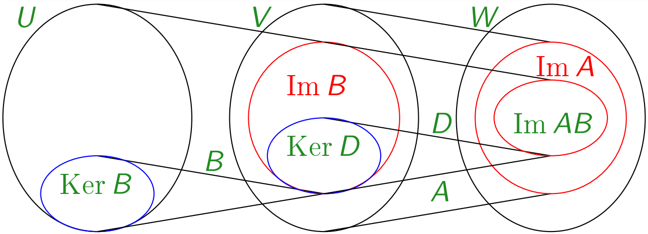
Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.

Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



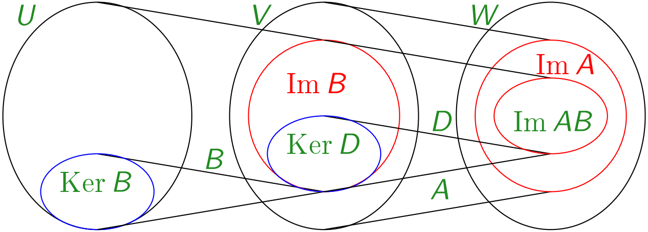
Bizonyítás

Mivel $\operatorname{Im} AB \subseteq \operatorname{Im} A$, így $r(AB) = \dim \operatorname{Im} AB \leq \dim \operatorname{Im} A = r(A)$.
Legyen $D : \operatorname{Im} B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\operatorname{Im}(D) = \operatorname{Im}(AB)$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



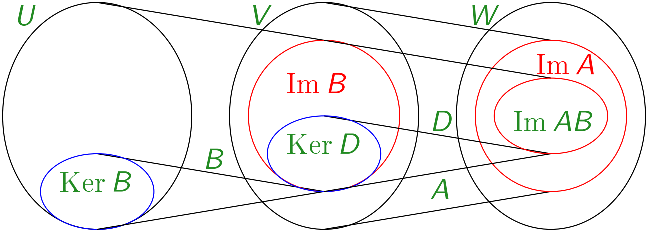
Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\,AB \subseteq \mathrm{Im}\,A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\,AB \leq \dim \mathrm{Im}\,A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\,B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\,D + \dim \mathrm{Ker}\,D = \dim \mathrm{Im}\,B$.

Szorzat rangja

Tétel (F5.7.12. Feladat)

$r(AB) \leq r(A)$ és $r(AB) \leq r(B)$ leképezésekre, így mátrixokra is.



Bizonyítás

Mivel $\mathrm{Im}\, AB \subseteq \mathrm{Im}\, A$, így $r(AB) = \dim \mathrm{Im}\, AB \leq \dim \mathrm{Im}\, A = r(A)$.
Legyen $D : \mathrm{Im}\, B \to W$, $D(v) = A(v)$. Ekkor $\mathrm{Im}(D) = \mathrm{Im}(AB)$.
A dimenziótételből $\dim \mathrm{Im}\, D + \dim \mathrm{Ker}\, D = \dim \mathrm{Im}\, B$.
Így $r(AB) = r(D) = \dim \mathrm{Im}\, D \leq \dim \mathrm{Im}\, B = r(B)$. $\square$

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált,

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom,

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja
a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja
a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(\alpha) = m(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha)$

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(\alpha) = m(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = 0q(\alpha) + r(\alpha)$

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(\alpha) = m(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = 0q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(\alpha) = m(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = 0q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$.
Azaz $f(\alpha) = 0 \iff r(\alpha) = 0$.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám, ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak. A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(\alpha) = m(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = 0q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$.
Azaz $f(\alpha) = 0 \iff r(\alpha) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom, melynek α gyöke.

Algebrai és transzcendens számok

Ismétlés (FGy9.1.1, K5.10.8): Az $\alpha \in \mathbb{C}$ algebrai szám,
ha gyöke egy nem nulla, racionális együtthatós polinomnak.
A többi komplex szám transzcendens.

K6.1.13. Tétel, K5.10.10. Tétel

Egy α algebrai szám m_α minimálpolinomja
a legalacsonyabb fokú (egyértelműen meghatározott) olyan normált, racionális együtthatós polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in \mathbb{Q}[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Bizonyítás mint mátrixok esetén:

Maradékos osztással $f = m_\alpha q + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m_\alpha)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(\alpha) = m(\alpha)q(\alpha) + r(\alpha) = 0q(\alpha) + r(\alpha) = r(\alpha)$.
Azaz $f(\alpha) = 0 \iff r(\alpha) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom, melynek α gyöke. Ezért $r(\alpha) = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. $\square$

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke,

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes,

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$,

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.
Megfordítva: Ha $f(\alpha) = 0$ és f normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.
Megfordítva: Ha $f(\alpha) = 0$ és f normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $m_\alpha \mid f$ miatt m_α nem nulla konstans,

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.
Megfordítva: Ha $f(\alpha) = 0$ és f normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $m_\alpha \mid f$ miatt m_α nem nulla konstans, vagy f egységszerese.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.
Megfordítva: Ha $f(\alpha) = 0$ és f normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $m_\alpha \mid f$ miatt m_α nem nulla konstans, vagy f egységszerese.
De m_α nem konstans, mert $m_\alpha(\alpha) = 0$.

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.
Megfordítva: Ha $f(\alpha) = 0$ és f normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $m_\alpha \mid f$ miatt m_α nem nulla konstans, vagy f egységszerese.
De m_α nem konstans, mert $m_\alpha(\alpha) = 0$.
Ezért $m_\alpha = f$, mert mindkettő normált. $\square$

A minimálpolinom felismerése

K6.1.13. Tétel, K5.10.12. Tétel

Algebrai szám minimálpolinomja irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött. Megfordítva, ha $f \in \mathbb{Q}[x]$ normált, irreducibilis, és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke, akkor $f = m_\alpha$.

Bizonyítás

Ha $m_\alpha(x) = g(x)h(x)$, akkor $g(\alpha)h(\alpha) = m_\alpha(\alpha) = 0$.
Mivel $\mathbb{C}$ nullosztómentes, innen $g(\alpha) = 0$ vagy $h(\alpha) = 0$.
Az első esetben $m_\alpha \mid g$, azaz g az m_α egységszerese.
Ezért az $m_\alpha = gh$ felbontás triviális. A másik eset hasonló.
Megfordítva: Ha $f(\alpha) = 0$ és f normált, irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, akkor $m_\alpha \mid f$ miatt m_α nem nulla konstans, vagy f egységszerese.
De m_α nem konstans, mert $m_\alpha(\alpha) = 0$.
Ezért $m_\alpha = f$, mert mindkettő normált. $\square$

Mátrix minimálpolinomja nem mindig irreducibilis, láttunk példákat.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x-24$,

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x-24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^n-2,

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^n - 2$,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^n - 2$,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^2 - 27$.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^n - 2$,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^2 - 27$.
Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^n - 2$,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^2 - 27$.
Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

(4) A $\sqrt[3]{9}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^3 - 9$.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x-24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^n-2,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^2-27.
Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

(4) A $\sqrt[3]{9}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^3-9.
Ez irreducibilis, mert harmadfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^n - 2$,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^2 - 27$.
Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

(4) A $\sqrt[3]{9}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^3 - 9$.
Ez irreducibilis, mert harmadfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.
Ismétlés: racionális gyökteszt!

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x - 24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^n - 2$,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^2 - 27$.
Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

(4) A $\sqrt[3]{9}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x^3 - 9$.
Ez irreducibilis, mert harmadfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.
Ismétlés: racionális gyökteszt!

(5) Tudjuk, hogy $1 + i$ negyedik hatványa -4.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x-24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^n-2,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^2-27.
Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

(4) A $\sqrt[3]{9}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^3-9.
Ez irreducibilis, mert harmadfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.
Ismétlés: racionális gyökteszt!

(5) Tudjuk, hogy $1+i$ negyedik hatványa -4.
A minimálpolinomja mégsem x^4+4, hanem x^2-2x+2.

Példák minimálpolinomra

(1) A 24 minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött $x-24$,
mert ez normált, elsőfokú, és így irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(2) Az $\sqrt[n]{2}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^n-2,
ez a Schönemann–Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött.

(3) A $\sqrt{27}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^2-27.
Ez irreducibilis, mert másodfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.

(4) A $\sqrt[3]{9}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött x^3-9.
Ez irreducibilis, mert harmadfokú, és nincs gyöke $\mathbb{Q}$-ban.
Ismétlés: racionális gyökteszt!

(5) Tudjuk, hogy $1+i$ negyedik hatványa -4.
A minimálpolinomja mégsem x^4+4, hanem x^2-2x+2.

(6) Az n-edik primitív egységgyökök közös minimálpolinomja
$\mathbb{Q}$ fölött a $\Phi_n(x)$ (n-edik körosztási polinom).

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról,

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel. A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő.
A rang két felső becslése.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő.
A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő.
A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja.
Szám minimálpolinomja osztója azoknak a polinomoknak, melyeknek a szám gyöke.

A 6. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Jordan-blokk, Jordan alakú mátrix. Lineáris leképezés rangja, mint a képtér dimenziója. Algebrai szám minimálpolinomja.

Tételek

Diagonalizálhatóság leolvasása a minimálpolinomról, főtengelytétel.
A Jordan-normálalak létezése, egyértelműsége.
A minimálpolinom leolvasása a Jordan-alakról.
Blokk-mátrix, Jordan-blokk hatványozása.
Leképezés és mátrixának a rangja egyenlő.
A rang két felső becslése. Összeg és szorzat rangja.
Szám minimálpolinomja osztója azoknak a polinomoknak, melyeknek a szám gyöke.
Szám minimálpolinomjának felismerése irreducibilitás segítségével.