Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

5. előadás

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.
Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra.

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.
Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ diagonalizálható, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.
Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ diagonalizálható, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.
A diagonalizálható $\iff$ van sajátvektorokból álló bázis.

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.
Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ diagonalizálható, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.
A diagonalizálható $\iff$ van sajátvektorokból álló bázis.

Definíció

Az M mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.

Diagonalizálható mátrixok

Ismétlés

Legyen $M, N \in T^{n\times n}$. Az M és N hasonló, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.
Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n\times n}$ mátrixra.

$A \in \mathrm{Hom}(V)$ diagonalizálható, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.
A diagonalizálható $\iff$ van sajátvektorokból álló bázis.

Definíció

Az M mátrix diagonalizálható, ha hasonló egy diagonális mátrixhoz.
Ekvivalens: M egy diagonalizálható transzformáció mátrixa.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1$$

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M diagonalizáltja

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M diagonalizáltja (főátlóban sajátértékek).

Diagonalizálás bázistranszformációval

Az új bázis a sajátvektorokból fog állni:

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies$ az A sajátértékei ± 1.

Sajátvektorokból álló bázis például $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Bázistranszformáció: az áttérés mátrixa $S = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$:

az oszlopok az új bázis vektorai a régi (a szokásos) bázisban.

Ennek inverze $S^{-1} = \dfrac{1}{-2} \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ezért

$S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ az M diagonalizáltja (főátlóban sajátértékek).

Vagyis M-et bázistranszformációval diagonális alakra hoztuk.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van,

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható.

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható. Mert: ha $Mv = 2v$,

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható. Mert: ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható. Mert: ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x+y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix}$$

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható. Mert: ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x + y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff y = 0.$$

A diagonalizálhatóság elégséges feltétele

Tétel

Ha egy $n \times n$-es mátrix karakterisztikus polinomjának n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.

Két példa a megfordítás kapcsán

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ és $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = k_N(x) = (x-2)^2$.

Azaz van kétszeres gyök. Az N diagonalizálható (diagonális).
Az M viszont nem diagonalizálható. Mert: ha $Mv = 2v$, akkor

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} 2x + y \\ 2y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x \\ 2y \end{bmatrix} \iff y = 0.$$

Az $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$ alakú vektorok között nincs két független (azaz bázis).

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1,$

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k,$

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) =$

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_k$ független,

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_k$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_k$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző,

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_k$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$.

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_k$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$.
Mivel $v_1 \neq 0$ (hiszen sajátvektor),

A sajátvektorok függetlenek

Lemma (Freud, 6.1.9. Feladat)

Páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok lineárisan függetlenek.

Így igaz a tétel, mert minden n elemű független rendszer bázis.

Bizonyítás

$A(v_1) = \lambda_1 v_1, \ldots, A(v_k) = \lambda_k v_k$, indukció k szerint (0-ra igaz).
Tegyük föl, hogy $\mu_1 v_1 + \ldots + \mu_k v_k = 0$. Az A-t alkalmazva
$0 = \mu_1 A(v_1) + \ldots + \mu_k A(v_k) = \mu_1 \lambda_1 v_1 + \ldots + \mu_k \lambda_k v_k$.
Az előző egyenlet λ_1-szeresét kivonva
$\mu_2(\lambda_2 - \lambda_1)v_2 + \ldots + \mu_k(\lambda_k - \lambda_1)v_k = 0$. Az indukciós feltevés miatt $v_2, \ldots, v_k$ független, így $\mu_j(\lambda_j - \lambda_1) = 0$, ha $j \geq 2$.
Mivel a λ_j páronként különböző, ezért $\mu_2 = \ldots = \mu_k = 0$.
Mivel $v_1 \neq 0$ (hiszen sajátvektor), a fenti egyenletből $\mu_1 = 0$. $\square$

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak).

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak).
A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának.

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak). A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak). A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak).
A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.
A transzformáció pontosan akkor diagonalizálható,

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak). A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.
A transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha

a kétféle multiplicitás minden sajátérték esetében egyenlő.

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak).
A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.
A transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha a kar. polinom gyöktényezőkre bomlik (a skalárok testében), és a kétféle multiplicitás minden sajátérték esetében egyenlő.

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak).
A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.
A transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha a kar. polinom gyöktényezőkre bomlik (a skalárok testében), és a kétféle multiplicitás minden sajátérték esetében egyenlő.

Példa: $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ esetében az egyetlen $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak). A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai. A transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha a kar. polinom gyöktényezőkre bomlik (a skalárok testében), és a kétféle multiplicitás minden sajátérték esetében egyenlő.

Példa: $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ esetében az egyetlen $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1 (a sajátalteret $[1, 0]^T$ generálja)

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak). A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai. A transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha a kar. polinom gyöktényezőkre bomlik (a skalárok testében), és a kétféle multiplicitás minden sajátérték esetében egyenlő.

Példa: $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ esetében az egyetlen $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1 (a sajátalteret $[1, 0]^T$ generálja) az algebrai 2,

Algebrai és geometriai multiplicitás

Definíció

Legyen λ sajátértéke az A transzformációnak (mátrixnak).
A λ algebrai multiplicitása k, ha λ (pontosan) k-szoros gyöke A karakterisztikus polinomjának. A λ geometriai multiplicitása m, ha a λ-hoz tartozó sajátaltér dimenziója m.

Tétel (HF!)

A geometriai multiplicitás legfeljebb akkora, mint az algebrai.
A transzformáció pontosan akkor diagonalizálható, ha a kar. polinom gyöktényezőkre bomlik (a skalárok testében), és a kétféle multiplicitás minden sajátérték esetében egyenlő.

Példa: $M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ esetében az egyetlen $\lambda = 2$ sajátérték geometriai multiplicitása 1 (a sajátalteret $[1, 0]^T$ generálja) az algebrai 2, mert $k_M(x) = (x-2)^2$.

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható,

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük),

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő.

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok” független sajátvektor.)

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok" független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n \times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben,

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok” független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n \times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben, akkor minden algebrai és geometriai multiplicitás 1,

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok” független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n\times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben, akkor minden algebrai és geometriai multiplicitás 1, azaz M diagonalizálható

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok" független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n \times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben, akkor minden algebrai és geometriai multiplicitás 1, azaz M diagonalizálható (így e tétel erősebb az imént belátottnál).

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok” független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n \times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben, akkor minden algebrai és geometriai multiplicitás 1, azaz M diagonalizálható (így e tétel erősebb az imént belátottnál).

Algoritmus a diagonalizálhatóság eldöntésére

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok" független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n \times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben, akkor minden algebrai és geometriai multiplicitás 1, azaz M diagonalizálható (így e tétel erősebb az imént belátottnál).

Algoritmus a diagonalizálhatóság eldöntésére

Az algebrai multiplicitások a karakterisztikus polinomról leolvashatóak (ki kell tudjuk számolni a gyökeit).

A diagonalizálhatóság eldöntése

Egy transzformáció (mátrix) pontosan akkor diagonalizálható, ha a karakterisztikus polinom gyöktényezőkre bomlik (ezért valós mátrixoknak sokszor a komplex sajátértékekeit nézzük), és minden sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása egyenlő. (Szemléletesen: van „elég sok” független sajátvektor.)

Speciálisan ha $M \in T^{n \times n}$ és $k_M(x)$-nek n különböző gyöke van T-ben, akkor minden algebrai és geometriai multiplicitás 1, azaz M diagonalizálható (így e tétel erősebb az imént belátottnál).

Algoritmus a diagonalizálhatóság eldöntésére

Az algebrai multiplicitások a karakterisztikus polinomról leolvashatóak (ki kell tudjuk számolni a gyökeit).
A geometriai multiplicitás a sajátvektorok kiszámításához felírt lineáris egyenletrendszerben a szabad változók száma.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0E + a_1M + \ldots + a_mM^m \in T^{n\times n}$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n \times n}$ az egységmátrix,
akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n \times n}$.
Ha V vektortér T fölött,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix,
akkor legyen $f(M) = a_0E + a_1M + \ldots + a_mM^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás,
akkor legyen $f(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_mA^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk!

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$f(x) = x - 2$,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0E + a_1M + \ldots + a_mM^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_mA^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_mx^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0E + a_1M + \ldots + a_mM^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0I + a_1A + \ldots + a_mA^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$$f(x) = x - 2,\ N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A a kétszeresre nyújtás az origóból,

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A$

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$f(x) = x - 2$, $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$, $f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A - 2I = 0$.

Mátrix behelyettesítése polinomba

Definíció (Freud, 6.3. szakasz)

Legyen T test, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m \in T[x]$.
Ha $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrix és $E \in T^{n\times n}$ az egységmátrix, akkor legyen $f(M) = a_0 E + a_1 M + \ldots + a_m M^m \in T^{n\times n}$.
Ha V vektortér T fölött, $A \in \mathrm{Hom}(V)$ és $I \in \mathrm{Hom}(V)$ az identitás, akkor legyen $f(A) = a_0 I + a_1 A + \ldots + a_m A^m \in \mathrm{Hom}(V)$.

Behelyettesítéskor az f konstans tagját az egységmátrixszal, illetve az identitással szorozzuk! (Képzelhetjük, hogy $M^0 = E$ és $A^0 = I$.)

Példa

$$f(x) = x - 2,\ N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ f(N) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} - 2\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A a kétszeresre nyújtás az origóból, $f(A) = A - 2I = 0$.
($[A] = N$ tetszőleges bázisban.)

Példák behelyettesítésre

Példa

$f(x) = x^2 - 4x + 4$,

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Példák behelyettesítésre

Példa

$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diagonális mátrix behelyettesítése (HF)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

Példák behelyettesítésre

Példa

$$f(x) = x^2 - 4x + 4, \quad M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Ekkor $f(M) = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}^2 - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} =$

$$= \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} - 4 \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Diagonális mátrix behelyettesítése (HF)

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} \Longrightarrow f(D) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & f(\lambda_2) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}.$$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n \times n}$, akkor

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n \times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n \times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.

$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.

$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.

$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.

$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.

$f(M) = aM^2 + bM + cE$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$,

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$.

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$?

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av + bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt!

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz
$aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt! HF: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av + bu)x^3 + (bv + cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av + bu)M^3 + (bv + cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz $aM^2vM + bMuM^2 = (av + bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt! HF: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$ (itt $M^0 = E$).

Behelyettesítés összegbe és szorzatba

Állítás

Ha $f, g \in T[x]$, $M \in T^{n\times n}$, akkor $(f+g)(M) = f(M) + g(M)$ és $(fg)(M) = f(M)g(M)$. Ugyanígy mátrix helyett transzformációra.

Példabizonyítás

Legyen $f(x) = ax^2 + bx + c$ és $g(x) = ux^2 + vx$.
$(fg)(x) = aux^4 + (av+bu)x^3 + (bv+cu)x^2 + cvx$.
$(fg)(M) = auM^4 + (av+bu)M^3 + (bv+cu)M^2 + cvM$.
$f(M) = aM^2 + bM + cE$ és $g(M) = uM^2 + vM$. Így $f(M)g(M) =$
$= aM^2uM^2 + aM^2vM + bMuM^2 + bMvM + cEuM^2 + cEvM$.
Nyilván $aM^2uM^2 = auM^4$, $cEvM = cvM$. De miért lesz $aM^2vM + bMuM^2 = (av+bu)M^3$? Vagyis $M^2M = MM^2$?
Az asszociativitás miatt! HF: $M^nM^k = M^kM^n$ ha $n, k \geq 0$ (itt $M^0 = E$). Vagyis M hatványai felcserélhetők. □

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$,

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek,

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan.

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!

Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár).

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x-2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE$

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE$

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$.

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$.
Azaz $c = 0$,

Polinom gyöke

Következmény

Ha $f \mid g$ és $f(M) = 0$, akkor $g(M) = 0$.

Definíció

M (vagy A) gyöke f-nek, ha $f(M) = 0$ (illetve $f(A) = 0$).

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ mely polinomoknak lesz gyöke?

Az $x - 2$ többszöröseinek biztosan. Másnak nem!
Ha $g(N) = 0$, akkor osszuk el g-t maradékosan $x - 2$-vel:
$g(x) = (x - 2)h(x) + c$ (ahol c skalár). Innen
$0 = g(N) = (N - 2E)h(N) + cE = 0h(N) + cE = cE$.
Azaz $c = 0$, tehát $x - 2 \mid g$.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy,

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.
Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n\times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.
Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is.
Ekkor a minimálpolinom jele m_A.

A minimálpolinom létezése

Tétel (vö. F6.3.2 és F6.3.4. Tétel)

Minden $M \in T^{n \times n}$ négyzetes mátrixhoz egyértelműen létezik egy normált $m_M \in T[x]$ polinom úgy, hogy tetszőleges $f \in T[x]$ polinom esetén $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Definíció

Az m_M az M mátrix minimálpolinomja.
Az analóg állítás érvényes minden véges dimenziós vektortéren ható A lineáris transzformációra is.
Ekkor a minimálpolinom jele m_A.

Példa

Az $N = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $x - 2$.

A minimálpolinomra vonatkozó tételek

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

A minimálpolinomra vonatkozó tételek

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

A minimálpolinomra vonatkozó tételek

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

A minimálpolinomra vonatkozó tételek

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.

A minimálpolinomra vonatkozó tételek

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.
A minimálpolinom a karakterisztikus polinom osztói között a legalacsonyabb fokú normált polinom,

A minimálpolinomra vonatkozó tételek

m_M normált, $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$.

Állítás

A minimálpolinom a legalacsonyabb fokú
olyan normált polinom, aminek a transzformáció gyöke.

Cayley–Hamilton-tétel

Minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának.

Következmények

A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.
A minimálpolinom a karakterisztikus polinom osztói között a legalacsonyabb fokú normált polinom, melynek a mátrix gyöke.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz
1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

A kétdimenziós eset

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\qquad k_M(x) = x^2 - 1$.

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz
1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz
1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$, akkor $M - cE = 0$,

A kétdimenziós eset

$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $\qquad k_M(x) = x^2 - 1$.

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis elsőfokú minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x-1$, $x+1$, x^2-1 egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis elsőfokú minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

Következmény

Ha egy kétszer kettes mátrix nem cE alakú,

A kétdimenziós eset

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad k_M(x) = x^2 - 1.$$

A minimálpolinom ennek normált osztója, azaz 1, $x - 1$, $x + 1$, $x^2 - 1$ egyike lesz. A minimálpolinomnak gyöke minden sajátérték, így $m_M(x) = x^2 - 1$.

Ha $m_M(x) = x - c$, akkor $M - cE = 0$, azaz $M = cE$. Vagyis elsőfokú minimálpolinomja pontosan a cE alakú mátrixoknak van.

Következmény

Ha egy kétszer kettes mátrix nem cE alakú, akkor minimálpolinomja ugyanaz, mint a karakterisztikus polinomja. □

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei,

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.

$m(D) = 0$ (HF),

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.

$m(D) = 0$ (HF), de $(x-1)(x-2) \mid m_D(x)$,

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.

$m(D) = 0$ (HF), de $(x-1)(x-2) \mid m_D(x)$, mert 1, 2 sajátérték. $\square$

Diagonális mátrix minimálpolinomja

Állítás

Legyen D diagonális mátrix és $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ a főátló elemei, de mindegyik csak egyszer felsorolva. Ekkor $m_D(x) = (x - \lambda_1) \ldots (x - \lambda_m)$.

Példabizonyítás

$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $m(x) = (x-1)(x-2)$.

$m(D) = 0$ (HF), de $(x-1)(x-2) \mid m_D(x)$, mert 1, 2 sajátérték. $\square$

$M = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ minimálpolinomja $(x-2)^2$ (van kétszeres gyöke!).

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.
Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke.

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.
Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke.
Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható.

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.
Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke.
Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható.
Mivel $M^2 = 0$, de $M \neq 0$, ezért M minimálpolinomja x^2,

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.
Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke.
Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható.
Mivel $M^2 = 0$, de $M \neq 0$, ezért M minimálpolinomja x^2,
hiszen ez a legalacsonyabb fokú, amelyiknek gyöke a mátrix.

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{és} \qquad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.
Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke.
Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható.
Mivel $M^2 = 0$, de $M \neq 0$, ezért M minimálpolinomja x^2,
hiszen ez a legalacsonyabb fokú, amelyiknek gyöke a mátrix.
Mivel $N^2 \neq 0$, ezért N minimálpolinomja x^3.

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.
Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke.
Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható.
Mivel $M^2 = 0$, de $M \neq 0$, ezért M minimálpolinomja x^2,
hiszen ez a legalacsonyabb fokú, amelyiknek gyöke a mátrix.
Mivel $N^2 \neq 0$, ezért N minimálpolinomja x^3.
Azt nem kell ellenőrizni, hogy x^3-nek gyöke N,

A minimálpolinom kiszámítása

Példa

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad N = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Mindkét mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3$.
A két minimálpolinom ennek normált osztója: 1, x, x^2 vagy x^3.
Mindkét mátrixnak a 0 az egyetlen sajátértéke.
Mivel minden sajátérték gyöke a minimálpolinomnak, 1 kizárható.
Mivel $M^2 = 0$, de $M \neq 0$, ezért M minimálpolinomja x^2,
hiszen ez a legalacsonyabb fokú, amelyiknek gyöke a mátrix.
Mivel $N^2 \neq 0$, ezért N minimálpolinomja x^3.
Azt nem kell ellenőrizni, hogy x^3-nek gyöke N,
mert ez következik a Cayley–Hamilton-tételből.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f)f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f)f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen
$g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges,

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \dots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \dots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \dots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n \times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n \times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M)$

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M)$

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$. Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$. Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$. Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$.
Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f)f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$.
Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$.
Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom, melynek M gyöke.

Létezik a minimálpolinom

Állítás

Ha $M \in T^{n\times n}$, akkor van olyan $g \neq 0$ polinom, melyre $g(M) = 0$. Ha m a legkisebb fokú ilyen, akkor $(\forall f) f(M) = 0 \iff m \mid f$.

Bizonyításvázlat

$E, M, M^2, \ldots, M^{n^2}$ lineárisan összefügg, mert $\dim(T^{n\times n}) = n^2$, és ez $n^2 + 1$ elem. Ezért van olyan $a_0, \ldots a_{n^2}$, nem mind nulla, hogy $a_0 E + a_1 M + \ldots + a_{n^2} M^{n^2} = 0$. Legyen $g(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n^2} x^{n^2}$. Ekkor $g \neq 0$, de $g(M) = 0$.

Legyen f tetszőleges, $f = mq + r$, ahol $\mathrm{gr}(r) < \mathrm{gr}(m)$ vagy $r = 0$. Ekkor $f(M) = m(M)q(M) + r(M) = 0q(M) + r(M) = r(M)$. Azaz $f(M) = 0 \iff r(M) = 0$. De m a legkisebb fokú polinom, melynek M gyöke. Ezért $r(M) = 0$ csak $r = 0$ esetén lehet. $\square$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$,

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$. Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor,

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv)$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v)$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$. Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$. Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.

$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.

$M^3 v = M(M^2 v)$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v)$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$,

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 Ev + a_1 Mv + \ldots + a_m M^m v =$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v$

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda) v$.

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda) v$.
Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$,

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda Mv = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 Mv = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 Ev + a_1 Mv + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda)v$.
Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$, és mivel $v \neq 0$,

Minden sajátérték gyök

Állítás (F6.3.5. Tétel)

Ha λ sajátértéke az M mátrixnak és $f(M) = 0$, akkor $f(\lambda) = 0$.
Így M minden sajátértéke gyöke M minimálpolinomjának.

Bizonyítás

Legyen $v \neq 0$ sajátvektor, azaz $Mv = \lambda v$.
$M^2 v = M(Mv) = M(\lambda v) = \lambda M v = \lambda^2 v$.
$M^3 v = M(M^2 v) = M(\lambda^2 v) = \lambda^2 M v = \lambda^3 v$.
És így tovább (indukcióval) $M^k v = \lambda^k v$, ha $k \geq 0$.
Ha $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_m x^m$, akkor
$f(M)v = a_0 E v + a_1 M v + \ldots + a_m M^m v =$
$= a_0 v + a_1 \lambda v + \ldots + a_m \lambda^m v = f(\lambda) v$.
Tehát $0 = f(M)v = f(\lambda)v$, és mivel $v \neq 0$, ezért $f(\lambda) = 0$. $\square$

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete,

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$. $\square$

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$. $\square$

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \leq n$. $\square$

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk.
A bizonyításához újabb eszközök kellenek.

Minden gyök sajátérték

Állítás

A minimálpolinom osztója a karakterisztikus polinomnak.
Speciálisan a minimálpolinom minden gyöke sajátérték.
A minimálpolinom foka legfeljebb a dimenzió.

Bizonyítás

A Cayley–Hamilton-tétel miatt $k_M(M) = 0$.
Ezért a minimálpolinom tulajdonsága miatt $m_M \mid k_M$.
Mivel k_M gyökei az M sajátértékei,
ezért m_M minden gyöke sajátértéke M-nek.
Mivel $n = \mathrm{gr}(k_M)$ az M mérete, ezért $\mathrm{gr}(m_M) \le n$. □

A Cayley–Hamilton-tételt nem bizonyítjuk.
A bizonyításához újabb eszközök kellenek.
Lásd Kiss: Bevezetés az algebrába, 7.7.6. Tétel.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$,

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}.$$

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$. Ha $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$. Ha $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$ és $v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$,

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$. Ha $M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$ és $v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$,
akkor $v_{n+1} = Mv_n$,

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%. Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált, és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő. Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$. Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$.
Vagyis a feladat az M mátrix hatványainak a kiszámítása.

Egyszerű alkalmazás fiktív adatokkal

Budapesten a tömegközlekedést használók aránya 60%.
Évente a tömegközlekedést használók 10%-a autóra vált,
és az autósok 5%-a tömegközlekedésre vált. Hosszú távon
milyen arányban használják majd a tömegközlekedést?

Matematikai modell

Az n-edik évben a_n-ed rész autós, b_n-ed rész tömegközlekedő.
Ekkor $a_{n+1} = 0{,}95a_n + 0{,}1b_n$, és $b_{n+1} = 0{,}05a_n + 0{,}9b_n$.
Jelenleg $a_0 = 0{,}4$ és $b_0 = 0{,}6$. Mátrixosan felírva:

$$\begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}. \text{ Ha } M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix} \text{ és } v_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

akkor $v_{n+1} = Mv_n$, tehát $v_n = M^n v_0$.
Vagyis a feladat az M mátrix hatványainak a kiszámítása.
Ehhez diagonalizáljuk az M mátrixot.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix},$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$,

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$,

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix},$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $\quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1}$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni:

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $\quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 + 0{,}85^n & 2 - 2 \cdot 0{,}85^n \\ 1 - 0{,}85^n & 1 + 2 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}.$$

A mátrix hatványainak kiszámítása

$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}$, $k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85$,

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$, $S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$, $S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D$.

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 + 0{,}85^n & 2 - 2\cdot 0{,}85^n \\ 1 - 0{,}85^n & 1 + 2\cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}.$$

$v_0 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$,

A mátrix hatványainak kiszámítása

$$M = \begin{bmatrix} 0{,}95 & 0{,}1 \\ 0{,}05 & 0{,}9 \end{bmatrix}, \quad k_M(x) = x^2 - 1{,}85x + 0{,}85,$$

Sajátértékek: 1 és $0{,}85$, sajátvektorok: $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$ és $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

$$S = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \; S^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \; S^{-1}MS = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0{,}85 \end{bmatrix} = D.$$

Ezért $M = SDS^{-1} \implies M^3 = SDS^{-1}SDS^{-1}SDS^{-1} = SD^3S^{-1}$.

De diagonális mátrixot könnyű hatványozni: $D^n = \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

$$M^n = SD^nS^{-1} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 + 0{,}85^n & 2 - 2 \cdot 0{,}85^n \\ 1 - 0{,}85^n & 1 + 2 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}.$$

$v_0 = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$, így $v_n = M^n v_0 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 - 0{,}8 \cdot 0{,}85^n \\ 1 + 0{,}8 \cdot 0{,}85^n \end{bmatrix}$.

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$),

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis
hosszú távon 66,666% autózik

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis
hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.
HF: Ez nem függ a kiinduló eloszlástól (a 60%-tól)!!

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval, és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik. Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.
HF: Ez nem függ a kiinduló eloszlástól (a 60%-tól)!!

Év	autózó	tömegközlekedő
0	40%	60%
1	44%	56%
2	47%	53%
5	55%	45%
10	61%	39%
20	66%	34%

Az eredmény elemzése

Az n-edik évben $a_n = 66{,}6 - 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék jár autóval,
és $b_n = 33{,}3 + 26.7 \cdot 0{,}85^n$ százalék tömegközlekedik.
Ha $n \to \infty$, akkor $0{,}85^n \to 0$ (mert $|0{,}85| < 1$), vagyis
hosszú távon 66,666% autózik és 33,333% tömegközlekedik.
HF: Ez nem függ a kiinduló eloszlástól (a 60%-tól)!!

Év	autózó	tömegközlekedő
0	40%	60%
1	44%	56%
2	47%	53%
5	55%	45%
10	61%	39%
20	66%	34%

Az eredeti föltevések fiktívek!

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.

$M \in T^{n \times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\Longrightarrow$ M diagonalizálható.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.

$M \in T^{n \times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\Longrightarrow$ M diagonalizálható.

$(\forall \lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\Longleftrightarrow$ M diagonalizálható.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.
$M \in T^{n\times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\implies M$ diagonalizálható.
$(\forall\lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\iff$ M diagonalizálható.
A minimálpolinom létezik, és $(\forall f)\big(f(M) = 0 \iff m_M \mid f\big)$.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.
$M \in T^{n \times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\Longrightarrow$ M diagonalizálható.
$(\forall \lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\iff$ M diagonalizálható.
A minimálpolinom létezik, és $(\forall f)(f(M) = 0 \iff m_M \mid f)$.
Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának,

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.
$M \in T^{n\times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\Longrightarrow$ M diagonalizálható.
$(\forall\lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\iff$ M diagonalizálható.
A minimálpolinom létezik, és $(\forall f)\big(f(M) = 0 \iff m_M \mid f\big)$.
Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, ezzel ekvivalens: $m_M \mid k_M$.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.
$M \in T^{n\times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\implies M$ diagonalizálható.
$(\forall\lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\iff$ M diagonalizálható.
A minimálpolinom létezik, és $(\forall f)\big(f(M) = 0 \iff m_M \mid f\big)$.
Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, ezzel ekvivalens: $m_M \mid k_M$.
A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.
$M \in T^{n \times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\Longrightarrow$ M diagonalizálható.
$(\forall \lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\iff$ M diagonalizálható.
A minimálpolinom létezik, és $(\forall f)\big(f(M) = 0 \iff m_M \mid f\big)$.
Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, ezzel ekvivalens: $m_M \mid k_M$.
A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.
A minimálpolinom akkor elsőfokú, ha a transzformáció nyújtás.

Az 5. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Diagonalizálható mátrix. Sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása. Mátrix behelyettesítése polinomba. Minimálpolinom.

Tételek

Különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorok függetlenek.
$M \in T^{n \times n}$-nek n különböző sajátértéke van $\Longrightarrow$ M diagonalizálható.
$(\forall \lambda)$ alg. és geom. multiplicitás egyenlő $\iff$ M diagonalizálható.
A minimálpolinom létezik, és $(\forall f)\big(f(M) = 0 \iff m_M \mid f\big)$.
Cayley-Hamilton-tétel: minden mátrix gyöke a karakterisztikus polinomjának, ezzel ekvivalens: $m_M \mid k_M$.
A minimálpolinom gyökei pontosan a sajátértékek.
A minimálpolinom akkor elsőfokú, ha a transzformáció nyújtás.
Diagonális mátrix minimálpolinomja (és sajátértékei).