

Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil

Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

<https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/>

4. előadás

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$,

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ (az egységmátrix).

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ és $[C]_{b/d} = E$ (az egységmátrix).

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ és $[C]_{b/d} = E$ (az egységmátrix).

Ezért $[v]_d = [BC(v)]_d =$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \begin{bmatrix} [d_1]_b, \dots, [d_n]_b \end{bmatrix} \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ és $[C]_{b/d} = E$ (az egységmátrix).

Ezért $[v]_d = [BC(v)]_d = [B]_{d/b}[C]_{b/b}[v]_b =$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \begin{bmatrix} [d_1]_b, \dots, [d_n]_b \end{bmatrix} \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ és $[C]_{b/d} = E$ (az egységmátrix).

Ezért $[v]_d = [BC(v)]_d = [B]_{d/b}[C]_{b/b}[v]_b = ES^{-1}[v]_b$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \begin{bmatrix} [d_1]_b, \dots, [d_n]_b \end{bmatrix} \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ és $[C]_{b/d} = E$ (az egységmátrix).

Ezért $[v]_d = [BC(v)]_d = [B]_{d/b}[C]_{b/b}[v]_b = ES^{-1}[v]_b = S^{-1}[v]_b$.

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ és $[C]_{b/d} = E$ (az egységmátrix).

Ezért $[v]_d = [BC(v)]_d = [B]_{d/b}[C]_{b/b}[v]_b = ES^{-1}[v]_b = S^{-1}[v]_b$.

HF: $[B]_{d/d} = S$

Transzformáció mátrixa új bázisban

A bázistranszformáció képlete (Freud, 5.8.1. Tétel)

Legyenek b és d bázisok V -ben, $v \in V$ és $A \in \text{Hom}(V)$.

Jelölje $S = \left[[d_1]_b, \dots, [d_n]_b \right] \in T^{n \times n}$ azt a mátrixot, amelynek oszlopaiban a d vektorainak koordinátái állnak a b bázisban.

Ekkor $[v]_d = S^{-1}[v]_b$, továbbá $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Bizonyítás

Az előírhatósági tétel miatt létezik az a B és C lineáris leképezés, melyre $B(b_j) = d_j$ és $C(d_j) = b_j$ minden j -re.

Ekkor $C = B^{-1}$, továbbá $[B]_{b/b} = S$ és $[C]_{b/b} = S^{-1}$.

Nyilván $[B]_{d/b} = E$ és $[C]_{b/d} = E$ (az egységmátrix).

Ezért $[v]_d = [BC(v)]_d = [B]_{d/b}[C]_{b/b}[v]_b = ES^{-1}[v]_b = S^{-1}[v]_b$.

HF: $[B]_{d/d} = S$ és $[C]_{d/d} = S^{-1}$.

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$.

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így

$$[A]_{d/d} = [B]_{d/b}[C]_{b/b}[A]_{b/b}[B]_{b/b}[C]_{b/d} =$$

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így

$$\begin{aligned} [A]_{d/d} &= [B]_{d/b} [C]_{b/b} [A]_{b/b} [B]_{b/b} [C]_{b/d} = \\ &= ES^{-1} [A]_{b/b} SE \end{aligned}$$

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így

$$\begin{aligned} [A]_{d/d} &= [B]_{d/b} [C]_{b/b} [A]_{b/b} [B]_{b/b} [C]_{b/d} = \\ &= ES^{-1} [A]_{b/b} SE = S^{-1} [A]_{b/b} S. \end{aligned}$$



Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így

$$\begin{aligned} [A]_{d/d} &= [B]_{d/b} [C]_{b/b} [A]_{b/b} [B]_{b/b} [C]_{b/d} = \\ &= ES^{-1} [A]_{b/b} SE = S^{-1} [A]_{b/b} S. \end{aligned}$$



Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N **hasonló**, ha van olyan A lineáris transzformáció,

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így

$$\begin{aligned} [A]_{d/d} &= [B]_{d/b} [C]_{b/b} [A]_{b/b} [B]_{b/b} [C]_{b/d} = \\ &= ES^{-1} [A]_{b/b} SE = S^{-1} [A]_{b/b} S. \end{aligned}$$



Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N **hasonló**, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így

$$\begin{aligned} [A]_{d/d} &= [B]_{d/b} [C]_{b/b} [A]_{b/b} [B]_{b/b} [C]_{b/d} = \\ &= ES^{-1} [A]_{b/b} SE = S^{-1} [A]_{b/b} S. \end{aligned}$$



Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N **hasonló**, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra.

Hasonlóság

Bizonyítás (folytatás)

Mivel $BC = I_V$, ezért $A = BCABC$. Így

$$\begin{aligned}[A]_{d/d} &= [B]_{d/b}[C]_{b/b}[A]_{b/b}[B]_{b/b}[C]_{b/d} = \\ &= ES^{-1}[A]_{b/b}SE = S^{-1}[A]_{b/b}S.\end{aligned}$$



Definíció

Legyen $M, N \in T^{n \times n}$. Az M és N **hasonló**, ha van olyan A lineáris transzformáció, hogy M is és N is az A mátrixa egy-egy alkalmas bázisban.

Állítás

Az M és N pontosan akkor hasonló, ha $M = S^{-1}NS$ alkalmas invertálható $S \in T^{n \times n}$ mátrixra.

Bizonyítás: HF (bázistranszformáció).

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0$$

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0$

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor $A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor $A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor $A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor

$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.

Ha A injektív, akkor $\text{Ker}(A) = 0$,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor

$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.

Ha A injektív, akkor $\text{Ker}(A) = 0$, mert ha $v \in \text{Ker}(A)$,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor

$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.

Ha A injektív, akkor $\text{Ker}(A) = 0$, mert ha $v \in \text{Ker}(A)$,

akkor $A(v) = 0 = A(0)$,

Magtér és injektivitás

Definíció (Freud, 5.1.4. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A magtere $\text{Ker}(A) = \{v \in V : A(v) = 0_W\}$.

$\text{Ker}(A)$ altér V -ben, és pontosan akkor $\{0_V\}$, ha A injektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_V \in \text{Ker}(A)$.

Legyen $u, v \in \text{Ker}(A)$, ekkor $A(u) = A(v) = 0$. Ezért

$A(u + v) = A(u) + A(v) = 0 + 0 = 0 \implies u + v \in \text{Ker}(A)$.

$A(\lambda v) = \lambda A(v) = \lambda 0 = 0 \implies \lambda v \in \text{Ker}(A)$. Tehát $\text{Ker}(A)$ altér.

Ha $\text{Ker}(A) = \{0\}$, akkor A injektív, mert ha $A(u) = A(v)$, akkor

$A(u - v) = A(u) - A(v) = 0$, ezért $u - v = 0$, azaz $u = v$.

Ha A injektív, akkor $\text{Ker}(A) = 0$, mert ha $v \in \text{Ker}(A)$, akkor $A(v) = 0 = A(0)$, így az injektivitás miatt $v = 0$. □

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete,

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll,

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll,
melyekhez van olyan $v \in V$,

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, melyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben,

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, melyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$,

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re. Ezért
 $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t$

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re. Ezért $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \text{Im}(A)$.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, melyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re. Ezért
 $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \text{Im}(A)$.
 $A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w$

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re. Ezért
 $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \text{Im}(A)$.
 $A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w \implies \lambda w \in \text{Im}(A)$.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re. Ezért
 $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \text{Im}(A)$.
 $A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w \implies \lambda w \in \text{Im}(A)$. Tehát $\text{Im}(A)$ altér.

Képtér és szürjektivitás

Definíció (Freud, 5.1.3. Definíció)

$A \in \text{Hom}(V, W)$. Az A képtere $\text{Im}(A) = \{A(v) \in W : v \in V\}$.
Azaz $\text{Im}(A)$ az A értékkészlete, azon $w \in W$ vektorokból áll, amelyekhez van olyan $v \in V$, hogy $A(v) = w$.

$\text{Im}(A)$ altér W -ben, és pontosan akkor W , ha A szürjektív.

Bizonyítás

$A(0_V) = 0_W$, ezért $0_W \in \text{Im}(A)$. Legyen $w, t \in \text{Im}(A)$, ekkor $A(u) = w$ és $A(v) = t$ alkalmas $u, v \in V$ -re. Ezért
 $A(u + v) = A(u) + A(v) = w + t \implies w + t \in \text{Im}(A)$.
 $A(\lambda u) = \lambda A(u) = \lambda w \implies \lambda w \in \text{Im}(A)$. Tehát $\text{Im}(A)$ altér.
Szürjektív akkor és csak akkor, ha értékkészlete az egész W . \square

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W,$

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$,

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer:

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$,

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

Független:

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m) = 0$.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m) = 0$. Ekkor $v = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m \in \operatorname{Ker}(A)$,

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m) = 0$. Ekkor $v = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m \in \operatorname{Ker}(A)$, és így felírható $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ alakban is.

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m) = 0$.

Ekkor $v = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m \in \operatorname{Ker}(A)$, és így felírható $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ alakban is. Bázisban v felírása

egyértelmű,

A dimenziótétel

Dimenziótétel (Freud, 5.4.1. Tétel)

$A : V \rightarrow W$, $\dim(V)$ véges $\implies \dim \operatorname{Im}(A) + \dim \operatorname{Ker}(A) = \dim V$.

Bizonyítás

Legyen b_1, \dots, b_n bázis $\operatorname{Ker}(A)$ -ban. Egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_m vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $\dim V = m + n$, így elég belátni, hogy $A(d_1), \dots, A(d_m)$ bázis $\operatorname{Im}(A)$ -ban.

Generátorrendszer: Ha $w \in \operatorname{Im}(A)$, akkor $w = A(v)$ alkalmas $v \in V$ -re. Legyen $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n + \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m$. Ekkor $w = A(v) = \mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m)$, mert $A(b_j) = 0$.

Független: Tegyük föl, hogy $\mu_1 A(d_1) + \dots + \mu_m A(d_m) = 0$.

Ekkor $v = \mu_1 d_1 + \dots + \mu_m d_m \in \operatorname{Ker}(A)$, és így felírható

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$ alakban is. Bázisban v felírása

egyértelmű, ezért $\mu_1 = \dots = \mu_m = 0$. □

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$,

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$,

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.

Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$,

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$.

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$.
Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is. \square

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$.
Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is. \square

Végtelen dimenzióban **nem igaz!**

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$.
Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is. \square

Végtelen dimenzióban **nem igaz!** Példa:

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = xf(x)$.

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$.
Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is. \square

Végtelen dimenzióban **nem igaz!** Példa:

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = xf(x)$. Injektív, de nem szürjektív.

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$.
Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is. \square

Végtelen dimenzióban **nem igaz!** Példa:

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = xf(x)$. Injektív, de nem szürjektív.

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = f'(x)$ (derivált).

A dimenziótétel következménye

Következmény (Freud, 5.4.2. Tétel)

Ha $\dim(V)$ véges, és $A \in \text{Hom}(V)$, akkor A szürjektivitása és injektivitása (külön) is elegendő az invertálhatósághoz.

Bizonyítás

Dimenziótétel: $\dim \text{Im}(A) + \dim \text{Ker}(A) = \dim V$.

Ha A szürjektív, akkor $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$, így $\dim \text{Ker}(A) = 0$.
Ezért $\text{Ker}(A) = 0$, és így A injektív is.

Ha A injektív, akkor $\dim \text{Ker}(A) = 0$, ezért $\dim \text{Im}(A) = \dim(V)$.
Mivel valódi altér dimenziója kisebb, ezért A szürjektív is. \square

Végtelen dimenzióban **nem igaz!** Példa:

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = xf(x)$. Injektív, de nem szürjektív.

$\mathbb{R}[x]$ -ben $A(f(x)) = f'(x)$ (derivált). Szürjektív, de nem injektív.

Leképezés determinánása

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A determinánsa $\det(A) = \det[A]$.

Leképezés determinánása

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A **determinánása** $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa,

Leképezés determinánása

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A determinánása $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, de melyik bázisban?

Leképezés determinánása

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A determinánása $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, de melyik bázisban? MINDEGY!

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A determinánsa $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, de melyik bázisban? MINDEGY!

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A determinánsa $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, de melyik bázisban? MINDEGY!

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det(S^{-1}[A]_{b/b}S) = \det([A]_{b/b})$,

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A **determinánsa** $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, **de melyik bázisban? MINDEGY!**

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det(S^{-1}[A]_{b/b}S) = \det([A]_{b/b})$,
hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprokai.

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A determinánsa $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, de melyik bázisban? MINDEGY!

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det(S^{-1}[A]_{b/b}S) = \det([A]_{b/b})$,
hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprokai.

A $\det(A)$ jelentése: hányszorosára növeli A a térfogatot.

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A **determinánsa** $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, **de melyik bázisban? MINDEGY!**

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det(S^{-1}[A]_{b/b}S) = \det([A]_{b/b})$,
hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprokai.

A $\det(A)$ jelentése: **hányszorosára növeli A a térfogatot.**
Pontos tárgyalás **előjeles mértékek** segítségével:
lásd Freud-jegyzet, 9.8. szakasz.

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A **determinánsa** $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, **de melyik bázisban? MINDEGY!**

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det(S^{-1}[A]_{b/b}S) = \det([A]_{b/b})$,
hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprokai.

A $\det(A)$ jelentése: **hányszorosára növeli A a térfogatot.**

Pontos tárgyalás **előjeles mértékek** segítségével:

lásd Freud-jegyzet, 9.8. szakasz.

$\det(A)$ pozitív, ha A **irányítástartó**,

Leképezés determinánsa

Definíció

Legyen $A \in \text{Hom}(V)$, ahol V véges dimenziós vektortér.
Ekkor A **determinánsa** $\det(A) = \det[A]$.

$[A]$ az A mátrixa, **de melyik bázisban? MINDEGY!**

A bázistranszformáció képlete miatt $[A]_{d/d} = S^{-1}[A]_{b/b}S$.
Determinánsok szorzástétele: $\det(S^{-1}[A]_{b/b}S) = \det([A]_{b/b})$,
hiszen a $\det(S^{-1})$ és $\det(S)$ számok egymás reciprokai.

A $\det(A)$ jelentése: **hányszorosára növeli A a térfogatot.**

Pontos tárgyalás **előjeles mértékek** segítségével:

lásd Freud-jegyzet, 9.8. szakasz.

$\det(A)$ pozitív, ha A **irányítástartó**, negatív, ha A **irányításváltó**.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor **ekvivalens**:

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor **ekvivalens**:

(1) A invertálható

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

(1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).

Itt C is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem jobb oldali nullosztó

Itt C is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem jobb oldali nullosztó (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem jobb oldali nullosztó (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).
- (6) A injektív

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem jobb oldali nullosztó (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).
- (6) A injektív (azaz $\text{Ker}(A) = \{0\}$).

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem jobb oldali nullosztó (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).
- (6) A injektív (azaz $\text{Ker}(A) = \{0\}$).
- (7) A szürjektív

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem jobb oldali nullosztó (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).
- (6) A injektív (azaz $\text{Ker}(A) = \{0\}$).
- (7) A szürjektív (azaz $\text{Im}(A) = V$).

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami lineáris).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem bal oldali nullosztó (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem jobb oldali nullosztó (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).
- (6) A injektív (azaz $\text{Ker}(A) = \{0\}$).
- (7) A szürjektív (azaz $\text{Im}(A) = V$).
- (8) A bijektív.

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság nyolc jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

Ha $\dim(V)$ véges, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$, akkor ekvivalens:

- (1) A invertálható (azaz van kétoldali inverze, ami **lineáris**).
- (2) A -nak van balinverze ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $XA = I$).
- (3) A -nak van jobbinverze. ($\exists X \in \text{Hom}(V)$, melyre $AX = I$).
- (4) A nem **bal oldali nullosztó** (azaz $AC = 0 \implies C = 0$).
- (5) A nem **jobb oldali nullosztó** (azaz $DA = 0 \implies D = 0$).
- (6) A injektív (azaz $\text{Ker}(A) = \{0\}$).
- (7) A szürjektív (azaz $\text{Im}(A) = V$).
- (8) A bijektív.
- (9) $\det(A) \neq 0$.

Itt C és D is $\text{Hom}(V)$ -ben van.

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális,

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az invertálhatóság jellemzései: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív.

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív.
Ilyenkor az inverze is lineáris: HF.

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív.
Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív.
Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható.

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív.
Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható.
Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív.
Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható.
Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$
(előző félév).

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív.
Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható.
Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$
(előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze.

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$,

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $X(AC) = (XA)C$

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C$

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC$

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$.

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$. Ez ugyanaz az ötlet, mint hogy test nullosztómentes.

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$. Ez ugyanaz az ötlet, mint hogy test nullosztómentes. Ezért (2) \implies (4).

Az invertálhatóság jellemzése: megjegyzések

(1) \implies (2),(3) triviális, (6),(7) \implies (8) volt már.

Az A mint függvény pontosan akkor invertálható, ha bijektív. Ilyenkor az inverze is lineáris: HF. Ezért (8) \iff (1).

Az A pontosan akkor invertálható, ha $[A]$ invertálható. Egy M mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) \neq 0$ (előző félév). Ezért (8) \iff (9).

Ha A bal oldali nullosztó, akkor nem lehet balinverze. Mert ha $AC = 0$, de $XA = I$, akkor $0 = X(AC) = (XA)C = IC = C$. Ez ugyanaz az ötlet, mint hogy test nullosztómentes. Ezért (2) \implies (4). Hasonlóan (3) \implies (5) (HF).

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$,

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív,

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben.

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \text{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j -re.

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \text{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j -re.

Tehát $C \neq 0$.

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \text{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j -re.

Tehát $C \neq 0$. Ugyanakkor $AC(b_j) = A(v) = 0$ minden j -re,

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \text{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j -re.

Tehát $C \neq 0$. Ugyanakkor $AC(b_j) = A(v) = 0$ minden j -re, mert $v \in \text{Ker}(A)$.

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \text{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j -re.

Tehát $C \neq 0$. Ugyanakkor $AC(b_j) = A(v) = 0$ minden j -re, mert $v \in \text{Ker}(A)$. Azaz AC egy bázis minden elemét nullába viszi,

Ha nem injektív, akkor bal nullosztó

Tehát elég belátni, hogy $(4) \implies (6)$ és $(5) \implies (7)$, mert így a bebizonyított nyilakon bármely két állítás között elmehetünk!

Állítás $((4) \implies (6))$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem injektív, akkor létezik $0 \neq C \in \text{Hom}(V)$, hogy $AC = 0$.

Bizonyítás

A nem injektív, ezért létezik $0 \neq v \in \text{Ker}(A)$.

Legyen b_1, \dots, b_n bázis V -ben. Az előírhatósági tétel miatt van olyan $C \in \text{Hom}(V)$, hogy $C(b_j) = v$ minden j -re.

Tehát $C \neq 0$. Ugyanakkor $AC(b_j) = A(v) = 0$ minden j -re, mert $v \in \text{Ker}(A)$. Azaz AC egy bázis minden elemét nullába viszi, így minden vektort nullába visz, tehát $AC = 0$. □

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás $(5) \implies (7)$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív,

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás $(5) \implies (7)$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .
Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban,

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás $(5) \implies (7)$

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává.

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás ((5) \implies (7))

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re.

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re. Tehát $D \neq 0$,

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re. Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra,

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re. Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$ alakban,

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re.

Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$ alakban, és $D(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) =$

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re.

Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$ alakban, és $D(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \dots + \lambda_m D(b_m)$

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re.

Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$ alakban, és $D(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \dots + \lambda_m D(b_m) = 0$.

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re.

Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$ alakban, és $D(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \dots + \lambda_m D(b_m) = 0$.

Így $DA(w) = 0$ minden $w \in V$ -re,

Ha nem szürjektív, akkor jobb nullosztó

Állítás (5) \implies (7)

Ha V véges dimenziós, és $0 \neq A \in \text{Hom}(V)$ nem szürjektív, akkor létezik $0 \neq D \in \text{Hom}(V)$, hogy $DA = 0$.

Bizonyítás

A nem szürjektív, így $\text{Im}(A)$ nem az egész V .

Legyen b_1, \dots, b_m bázis $\text{Im}(A)$ -ban, és egészítsük ezt ki a d_1, \dots, d_k vektorokkal V egy bázisává. Ekkor $k \neq 0$.

Az előírhatósági tétel miatt van olyan $D \in \text{Hom}(V)$, hogy $D(b_i) = 0$ minden i -re és $D(d_j) = d_j \neq 0$ minden j -re.

Tehát $D \neq 0$, viszont $D(v) = 0$ minden $v \in \text{Im}(A)$ -ra, mert minden ilyen v felírható $\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m$ alakban, és $D(\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_m b_m) = \lambda_1 D(b_1) + \dots + \lambda_m D(b_m) = 0$.

Így $DA(w) = 0$ minden $w \in V$ -re, mert $v = A(w) \in \text{Im}(A)$. □

Mátrix invertálhatóságának jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra ekvivalens:

Mátrix invertálhatóságának jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra ekvivalens:

(1) M invertálható

Mátrix invertálhatóságának jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

(1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).

Mátrix invertálhatóságának jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra ekvivalens:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem bal oldali nullosztó

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra ekvivalens:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem bal oldali nullosztó (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem **bal oldali nullosztó** (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).

Itt C is $T^{n \times n}$ -beli mátrix.

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem **bal oldali nullosztó** (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).
- (5) M nem **jobb oldali nullosztó**

Itt C is $T^{n \times n}$ -beli mátrix.

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem **bal oldali nullosztó** (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).
- (5) M nem **jobb oldali nullosztó** (azaz $DM = 0 \implies D = 0$).

Itt C és D is $T^{n \times n}$ -beli mátrix.

Mátrix invertálhatóságának jellemzése

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem **bal oldali nullosztó** (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).
- (5) M nem **jobb oldali nullosztó** (azaz $DM = 0 \implies D = 0$).
- (9) $\det(M) \neq 0$.

Itt C és D is $T^{n \times n}$ -beli mátrix.

Mátrix invertálhatóságának jellemzései

Tétel (Freud, 5.6. szakasz)

A $0 \neq M \in T^{n \times n}$ mátrixra **ekvivalens**:

- (1) M invertálható (azaz van kétoldali inverze).
- (2) M -nak van balinverze.
- (3) M -nak van jobbinverze.
- (4) M nem **bal oldali nullosztó** (azaz $MC = 0 \implies C = 0$).
- (5) M nem **jobb oldali nullosztó** (azaz $DM = 0 \implies D = 0$).
- (9) $\det(M) \neq 0$.

Itt C és D is $T^{n \times n}$ -beli mátrix.

Bizonyítás

A mátrixok és a lineáris transzformációk közötti **kölcsönösen egyértelmű, művelettartó** megfeleltetésből következik.

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$,

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.
Ekkor $(CA)B = C(AB)$

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.
Ekkor $IB = (CA)B = C(AB)$

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.
Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB)$

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.
Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI$

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.
Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.

Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Azaz $B = C$

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.

Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. □

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.

Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. □

Fontos megjegyzés

Innen négyzetes mátrixokra $MN = E \implies NM = E$.

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.

Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. □

Fontos megjegyzés

Innen négyzetes mátrixokra $MN = E \implies NM = E$.

Ezt tavaly előjeles aldeterminánsokkal bizonyítottuk.

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.

Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. □

Fontos megjegyzés

Innen négyzetes mátrixokra $MN = E \implies NM = E$.

Ezt tavaly előjeles aldeterminánsokkal bizonyítottuk.

A mostani **számolásmentes** bizonyítás mélyén a **dimenziótétel** van.

Bal- és jobbinverz

Tétel

Ha $\dim(V)$ véges, $A, B \in \text{Hom}(V)$ és $AB = I$, akkor $BA = I$.

Bizonyítás

A feltétel szerint A -nak van jobbinverze (a B),
ezért az előző tétel miatt van egy C balinverze is: $CA = I$.

Ekkor $B = IB = (CA)B = C(AB) = CI = C$.

Azaz $B = C$ tehát B kétoldali inverz: $BA = CA = I$. □

Fontos megjegyzés

Innen négyzetes mátrixokra $MN = E \implies NM = E$.

Ezt tavaly előjeles aldeterminánsokkal bizonyítottuk.

A mostani **számolásmentes** bizonyítás mélyén a **dimenziótétel** van.

Ez az absztrakt módszerek erejét demonstrálja.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll,

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1$,

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla),

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ **sajátértéke**,

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ **sajátértéke**, v pedig egy λ -hoz tartozó **sajátvektora** A -nak.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ **sajátértéke**, v pedig egy λ -hoz tartozó **sajátvektora** A -nak.
 A λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér** $\{v : A(v) = \lambda v\}$,

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ **sajátértéke**, v pedig egy λ -hoz tartozó **sajátvektora** A -nak.
 A λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér** $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis a λ -hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ **sajátértéke**, v pedig egy λ -hoz tartozó **sajátvektora** A -nak.
 A λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér** $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis a λ -hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. **HF:** ez altér.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ **sajátértéke**, v pedig egy λ -hoz tartozó **sajátvektora** A -nak.
 A λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér** $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis a λ -hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. **HF**: ez altér.

Nyilván $Av = \lambda v \iff [A][v] = \lambda[v]$.

Leképezés diagonális mátrixa

Definíció

$A \in \text{Hom}(V)$ **diagonalizálható**, ha van olyan bázis, amelyben A mátrixa diagonális.

$A \in \text{Hom}(V)$ és b_1, \dots, b_n ilyen bázis. Ha $[A]_{b,b}$ főátlójában $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ áll, akkor $A(b_1) = \lambda_1 b_1, \dots, A(b_n) = \lambda_n b_n$ kell.

Definíció (F6.1.1. és F6.1.2. Definíció)

V vektortér, $A \in \text{Hom } V$ és $v \in V$ (vagy $A \in T^{n \times n}$ és $v \in T^n$).
Ha $A(v) = \lambda v$, ahol $v \neq 0$ (de λ lehet nulla), akkor λ **sajátértéke**, v pedig egy λ -hoz tartozó **sajátvektora** A -nak.
 A λ sajátértékhez tartozó **sajátaltér** $\{v : A(v) = \lambda v\}$, vagyis a λ -hoz tartozó sajátvektorok és a nullvektor. **HF:** ez altér.

Nyilván $Av = \lambda v \iff [A][v] = \lambda[v]$. Ezért A sajátértékei ugyanazok, mint a mátrixának a sajátértékei.

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v$$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v$$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = A v - \lambda I v$$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre.

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?
Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0$

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$,

A sajátértékek meghatározása

Következmény (Freud, 6.1.4. Tétel)

$A \in \text{Hom}(V)$ diagonalizálható \iff van sajátvektorokból álló bázis.

$$A(v) = \lambda v \iff 0 = Av - \lambda v = Av - \lambda I v = (A - \lambda I)v.$$

Azaz v sajátvektor a λ sajátértékhez $\iff 0 \neq v \in \text{Ker}(A - \lambda I)$.

Így λ sajátérték $\iff \text{Ker}(A - \lambda I) \neq \{0\} \iff \det(A - \lambda I) = 0$.

Példa

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mi lesz $\det(A - \lambda I)$?

Leképezés determinánsa a mátrixának a determinánsa.

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies [A - \lambda I] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - \lambda & 1 \\ 1 & 0 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Így $\det[A - \lambda I] = \lambda^2 - 1 = 0 \implies \lambda = \pm 1$, ezek A sajátértékei.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$,

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$,

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

(1) A k_M tényleg n -edfokú polinom

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

(1) A k_M tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthetővel.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényezős alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

- (1) A k_M tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthetővel.
- (2) A k_M karakterisztikus polinom gyökei az M sajátértékei.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

- (1) A k_M tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.
- (2) A k_M karakterisztikus polinom gyökei az M sajátértékei.
- (3) A **sajátértékek összege**, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az M mátrix **nyoma**,

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

- (1) A k_M tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthetővel.
- (2) A k_M karakterisztikus polinom gyökei az M sajátértékei.
- (3) A **sajátértékek összege**, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az M mátrix **nyoma**, vagyis az M főátlójában álló elemek összege.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

- (1) A k_M tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.
- (2) A k_M karakterisztikus polinom gyökei az M sajátértékei.
- (3) A **sajátértékek összege**, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az M mátrix **nyoma**, vagyis az M főátlójában álló elemek összege.
Ez a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$ -szerese.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

- (1) A k_M tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.
- (2) A k_M karakterisztikus polinom gyökei az M sajátértékei.
- (3) A **sajátértékek összege**, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az M mátrix **nyoma**, vagyis az M főátlójában álló elemek összege.
Ez a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$ -szerese.
- (4) A **sajátértékek szorzata** $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(M)$.

A karakterisztikus polinom

Definíció

$k_A(x) = \det(A - xI)$ az A karakterisztikus polinomja.

Tétel (Freud, 6.2. szakasz)

$M \in T^{n \times n}$, az M karakterisztikus polinomja $k_M = \det(M - xE)$, és ennek gyöktényező alakja $(-1)^n(x - \lambda_1) \dots (x - \lambda_n)$.

- (1) A k_M tényleg n -edfokú polinom $(-1)^n$ főegyütthatóval.
- (2) A k_M karakterisztikus polinom gyökei az M sajátértékei.
- (3) A **sajátértékek összege**, $\lambda_1 + \dots + \lambda_n$ az M mátrix **nyoma**, vagyis az M főátlójában álló elemek összege.
Ez a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$ -szerese.
- (4) A **sajátértékek szorzata** $\lambda_1 \dots \lambda_n = \det(M)$.
Ez a k_M polinom konstans tagja.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész).

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.
Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert
elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} =$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) =$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$\begin{aligned}k_A(x) &= \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ &= x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha)\end{aligned}$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$\begin{aligned}k_A(x) &= \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ &= x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.\end{aligned}$$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$,

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$,

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 1 \\ -1 & 1 - x \end{bmatrix} =$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 1 \\ -1 & 1 - x \end{bmatrix} = \\ = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2.$

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 1 \\ -1 & 1 - x \end{bmatrix} = \\ = x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2$. Tehát 2 az egyetlen sajátérték.

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 1 \\ -1 & 1 - x \end{bmatrix} =$

$$= x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2. \text{ Tehát } 2 \text{ az egyetlen sajátérték.}$$

Ez kétszeres gyöke k_M -nek!

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 1 \\ -1 & 1 - x \end{bmatrix} =$

$$= x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2. \text{ Tehát } 2 \text{ az egyetlen sajátérték.}$$

Ez kétszeres gyöke k_M -nek! Nyom $= 2 + 2$,

Példák karakterisztikus polinomra

Legyen A a síkon az origó körüli α szögű forgatás.

Valós sajátvektor csak $\alpha = k180^\circ$ esetén van (k egész). Mert elemi geometria: sajátvektor párhuzamos az elforgatottjával.

$$k_A(x) = \det \begin{bmatrix} \cos(\alpha) - x & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) - x \end{bmatrix} = (\cos(\alpha) - x)^2 + \sin^2(\alpha) = \\ = x^2 - (2 \cos \alpha)x + (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) = x^2 - (2 \cos \alpha)x + 1.$$

Gyökei $\cos \alpha \pm i \sin \alpha$, azaz komplex sajátértékek!

Az A mátrixának nyoma $2 \cos \alpha$, determinánsa 1 .

Legyen $M = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. Ekkor $k_M(x) = \det \begin{bmatrix} 3 - x & 1 \\ -1 & 1 - x \end{bmatrix} =$

$$= x^2 - 4x + 4 = (x - 2)^2. \text{ Tehát } 2 \text{ az egyetlen sajátérték.}$$

Ez kétszeres gyöke k_M -nek! Nyom $= 2 + 2$, determináns $= 2 \cdot 2$.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a tükrözés az $y = x$ egyenesre. Mik A sajátvektorai?

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?

A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektora? A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1-hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1 -hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1 -hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1 -hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1 -hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

Sajátvektorokból álló bázis: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

A sajátvektorok meghatározása

Legyen A a **tükrözés az $y = x$ egyenesre**. Mik A sajátvektorai?
A sík szokásos bázisában

$$[A] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \implies k_A(x) = x^2 - 1 \implies \text{az } A \text{ sajátértékei } \pm 1.$$

A sajátvektorokra $A(v) = 1 \cdot v$ és $A(v) = (-1) \cdot v$.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \implies \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \text{ azaz } x = y.$$

Tehát az 1 -hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ (ahol r valós, $r \neq 0$).

Ugyanígy a -1 -hez tartozó sajátvektorok $r \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ ($r \neq 0$).

Sajátvektorokból álló bázis: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Ebben $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz,

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja,

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Ha M és N hasonló, akkor van olyan A lineáris transzformáció,

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Ha M és N hasonló, akkor van olyan A lineáris transzformáció, és b , d bázisok,

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Ha M és N hasonló, akkor van olyan A lineáris transzformáció, és b, d bázisok, hogy $[A]_{b/b} = M$

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Ha M és N hasonló, akkor van olyan A lineáris transzformáció, és b, d bázisok, hogy $[A]_{b/b} = M$ és $[A]_{d/d} = N$.

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Ha M és N hasonló, akkor van olyan A lineáris transzformáció, és b, d bázisok, hogy $[A]_{b/b} = M$ és $[A]_{d/d} = N$.
Ezért $k_M(x) = k_A(x) = k_N(x)$. □

Hasonlóság és sajátértékek

Láttuk

Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja ugyanaz, mint a mátrixának a karakterisztikus polinomja.

Következmény

Hasonló mátrixoknak ugyanaz a karakterisztikus polinomja, és így a sajátértékei is (de a sajátvektoraik nem feltétlenül).

Bizonyítás

Ha M és N hasonló, akkor van olyan A lineáris transzformáció, és b, d bázisok, hogy $[A]_{b/b} = M$ és $[A]_{d/d} = N$.
Ezért $k_M(x) = k_A(x) = k_N(x)$. □

HF az állítást a bázistranszformáció képletéből levezetni.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánása.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa.
Diagonalizálható transzformáció.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa.
Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa.
Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér.
Karakterisztikus polinom.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén).

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa.
Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér.
Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén).
Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel. Az invertálhatóság jellemzése mátrixokra és transzformációkra.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel. Az invertálhatóság jellemzése mátrixokra és transzformációkra. A balinverz jobbinverz is véges dimenzióban.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel. Az invertálhatóság jellemzése mátrixokra és transzformációkra. A balinverz jobbinverz is véges dimenzióban. A sajátértékek a kar. pol. gyökei.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánsa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel. Az invertálhatóság jellemzése mátrixokra és transzformációkra. A balinverz jobbinverz is véges dimenzióban. A sajátértékek a kar. pol. gyökei. A mátrix nyomának és determinánjának kapcsolata a sajátértékekkel és a kar. pol. együtthatóival.

A 4. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Hasonló mátrixok. Magtér, képtér. Transzformáció determinánusa. Diagonalizálható transzformáció. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér. Karakterisztikus polinom.

Tételek

A bázistranszformáció képlete (vektor és leképezés esetén). Hasonló mátrixok jellemzése a bázistranszformáció segítségével. Magtér és injektivitás. Képtér és szürjektivitás. A dimenziótétel. Az invertálhatóság jellemzése mátrixokra és transzformációkra. A balinverz jobbinverz is véges dimenzióban. A sajátértékek a kar. pol. gyökei. A mátrix nyomának és determinánusának kapcsolata a sajátértékekkel és a kar. pol. együtthatóival. Hasonló mátrixok kar. polinomja egyenlő.