Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/
/linearis-es-absztrakt-algebra/

Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

2. előadás

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \dots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0 b_1 + \dots + 0 b_n = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$,
és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$,
és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.
Ha független, akkor egyértelmű a fölírás,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$,
és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.
Ha független, akkor egyértelmű a fölírás, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$,
és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.
Ha független, akkor egyértelmű a fölírás, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen
$(\lambda_1 - \mu_1) b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n) b_n = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$, és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.
Ha független, akkor egyértelmű a fölírás, mert ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen $(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt $\lambda_j - \mu_j = 0$,

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \ldots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \ldots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$,
és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.
Ha független, akkor egyértelmű a fölírás, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen
$(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt
$\lambda_j - \mu_j = 0$, azaz $\lambda_j = \mu_j$ minden j-re

A bázis független generátorrendszer

Ismétlés: Bázis = lineárisan független generátorrendszer.

Állítás (F4.5.2. Tétel)

$b_1, \dots, b_n$ pontosan akkor bázis V-ben, ha V minden eleme egyértelműen fölírható a $b_1, \dots, b_n$ lineáris kombinációjaként.

Bizonyításvázlat: Felírható $\iff$ generátorrendszer (nyilván).
Ha egyértelmű a felírás, akkor független, mert ha
$\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = 0$, akkor $0b_1 + \ldots + 0b_n = 0$,
és az egyértelműség miatt $(\forall j)\lambda_j = 0$.
Ha független, akkor egyértelmű a fölírás, mert ha
$v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n = \mu_1 b_1 + \ldots + \mu_n b_n$, akkor innen
$(\lambda_1 - \mu_1)b_1 + \ldots + (\lambda_n - \mu_n)b_n = 0$, és a függetlenség miatt
$\lambda_j - \mu_j = 0$, azaz $\lambda_j = \mu_j$ minden j-re (tehát egyértelmű). $\square$

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy **koordinátarendszert** vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű" is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött,

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis.

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$,

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, akkor $[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$ a v koordinátavektora ebben a bázisban.

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis. Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, akkor $[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$ a v koordinátavektora ebben a bázisban.

A koordinátázás haszna

A keletkező T^n-beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti V vektortér elemeivel,

A bázis mint koordinátarendszer

A bázist úgy képzeljük, hogy a V vektortéren egy koordinátarendszert vezetünk be (lehet „ferdeszögű” is).

Definíció (Freud, 4.7. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in V$ bázis.
Ha $v \in V$ és $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, ahol $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in T$, akkor

$[v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \ldots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \in T^n$ a v koordinátavektora ebben a bázisban.

A koordinátázás haszna

A keletkező T^n-beli vektorokkal általában könnyebb számolni, mint az eredeti V vektortér elemeivel, amik bonyolult dolgok (például függvények, geometriai transzformációk) is lehetnek.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$,

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis,

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.

Persze B' „ferdeszögű” koordinátarendszert ad a síkon,

Példák koordinátákra

$B = (1, x)$ bázis $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb elsőfokú polinomjai között.

A $v = 51x - 3$ koordinátavektora $[v]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

$B' = (1 + x, x)$ bázis ugyanebben a vektortérben.

Ekkor $[v]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$, mert $v = 51x - 3 = -3(1 + x) + 54x$.

$V = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ fölött, $B = (1, i)$. Ekkor $[-3 + 51i]_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 51 \end{bmatrix}$.

Ha $B' = (1 + i, i)$ másik bázis, akkor $[-3 + 51i]_{B'} = \begin{bmatrix} -3 \\ 54 \end{bmatrix}$.

Indoklás: $-3 + 51i = -3(1 + i) + 54i$.

Persze B' „ferdeszögű” koordinátarendszert ad a síkon, hiszen $1 + i$ nem merőleges i-re.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?
$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$,

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1 + i, 2 - i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4 + i]_B$?
$x(1 + i) + y(2 - i) = 4 + i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.

Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4+i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4+i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához
lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4+i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.
Bázistranszformáció: ha egy bázist másikra cserélünk,

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4+i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.
Bázistranszformáció: ha egy bázist másikra cserélünk, akkor hogyan változik egy vektor koordinátavektora?

A koordináták kiszámítása

Láttuk: egy vektor koordinátáinak kiszámításához lineáris egyenletrendszert kell megoldani.
Mivel bázisról van szó, egyértelmű megoldása lesz.

Példa

$B = (1+i, 2-i)$ bázis $\mathbb{C}$-ben $\mathbb{R}$ fölött. Mi lesz $[4+i]_B$?
$x(1+i) + y(2-i) = 4+i$. A valós és képzetes rész:
$x + 2y = 4$ és $x - y = 1$, ez lineáris egyenletrendszer.
Megoldás: $x = 2$ és $y = 1$. Azaz $[4+i]_B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Valójában azt használtuk, hogy 1 és i bázis.
Bázistranszformáció: ha egy bázist másikra cserélünk, akkor hogyan változik egy vektor koordinátavektora? Képlet: később.

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független,

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben,

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$.

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen:

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő,

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként:

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként:
$f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re).

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1}g_1 + \ldots + \lambda_{jk}g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a

$\lambda_{1i}x_1 + \ldots + \lambda_{ni}x_n = 0$ lineáris egyenletrendszert.

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a $\lambda_{1i} x_1 + \ldots + \lambda_{ni} x_n = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ lineáris egyenletrendszert.

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a $\lambda_{1i} x_1 + \ldots + \lambda_{ni} x_n = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ lineáris egyenletrendszert.
Indirekt feltevés: $n > k$.

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a $\lambda_{1i} x_1 + \ldots + \lambda_{ni} x_n = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ lineáris egyenletrendszert. Indirekt feltevés: $n > k$. Homogén, így lenne nemtriviális megoldás

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a $\lambda_{1i} x_1 + \ldots + \lambda_{ni} x_n = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ lineáris egyenletrendszert. Indirekt feltevés: $n > k$. Homogén, így lenne nemtriviális megoldás (több ismeretlen, mint egyenlet, F3.1.4. Tétel Algebra1-ből).

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a $\lambda_{1i} x_1 + \ldots + \lambda_{ni} x_n = 0$ ($1 \leq i \leq k$) lineáris egyenletrendszert.
Indirekt feltevés: $n > k$. Homogén, így lenne nemtriviális megoldás (több ismeretlen, mint egyenlet, F3.1.4. Tétel Algebra1-ből).
De erre a megoldásra $x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n = 0$,

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \dots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \dots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \dots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a $\lambda_{1i} x_1 + \dots + \lambda_{ni} x_n = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ lineáris egyenletrendszert. Indirekt feltevés: $n > k$. Homogén, így lenne nemtriviális megoldás (több ismeretlen, mint egyenlet, F3.1.4. Tétel Algebra1-ből). De erre a megoldásra $x_1 f_1 + \dots + x_n f_n = 0$, ellentmondás,

Független $\leq$ generátorrendszer

Tétel (F4.5.4. Tétel)

Ha $F = \{f_1, \ldots, f_n\}$ független, $G = \{g_1, \ldots, g_k\}$ generátorrendszer egy V vektortérben, akkor $n \leq k$. Azaz $|F| \leq |G|$, szövegesen: tetszőleges független rendszer elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint egy tetszőleges generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Mivel G generátorrendszer, f_j felírható lineáris kombinációként: $f_j = \lambda_{j1} g_1 + \ldots + \lambda_{jk} g_k$ (minden $1 \leq j \leq n$-re). Tekintsük a $\lambda_{1i} x_1 + \ldots + \lambda_{ni} x_n = 0$ $(1 \leq i \leq k)$ lineáris egyenletrendszert. Indirekt feltevés: $n > k$. Homogén, így lenne nemtriviális megoldás (több ismeretlen, mint egyenlet, F3.1.4. Tétel Algebra1-ből). De erre a megoldásra $x_1 f_1 + \ldots + x_n f_n = 0$, ellentmondás, hiszen $f_1, \ldots, f_n$ lineárisan független. $\square$

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója,

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független,

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer,

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.
Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.
Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.
Legyen B egy rögzített bázis V-ben.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.
Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.
Legyen B egy rögzített bázis V-ben. Ekkor $|B| = \dim(V)$.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.
Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.
Legyen B egy rögzített bázis V-ben. Ekkor $|B| = \dim(V)$.
Ha F független, akkor $|F| \leq |B|$,

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.
Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.
Legyen B egy rögzített bázis V-ben. Ekkor $|B| = \dim(V)$.
Ha F független, akkor $|F| \leq |B|$, mert B generátorrendszer.

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.
Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.
Legyen B egy rögzített bázis V-ben. Ekkor $|B| = \dim(V)$.
Ha F független, akkor $|F| \leq |B|$, mert B generátorrendszer.
Ha G generátorrendszer, akkor $|G| \geq |B|$,

Bázis elemszáma egyértelmű

Következmény (F4.5.4. Tétel)

Egy V vektortér bármely két bázisának elemszáma ugyanaz.
(Ez az elemszám a vektortér dimenziója, $\dim(V)$).
Minden független rendszer elemszáma $\leq \dim(V)$.
Minden generátorrendszer elemszáma $\geq \dim(V)$.

Bizonyítás

Ha B_1 és B_2 bázis, akkor B_1 független, és B_2 generátorrendszer, ezért B_1 elemszáma kisebb vagy egyenlő, mint B_2 elemszáma.
B_1 és B_2-t kicserélve ugyanezzel a gondolatmenettel $|B_2| \leq |B_1|$.
Tehát B_1 és B_2 elemszáma egyenlő.
Legyen B egy rögzített bázis V-ben. Ekkor $|B| = \dim(V)$.
Ha F független, akkor $|F| \leq |B|$, mert B generátorrendszer.
Ha G generátorrendszer, akkor $|G| \geq |B|$, mert B független. $\square$

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től,

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
$v_1, \dots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \dots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \dots, v_m$ lineáris kombinációjaként.

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Nyilván $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor generátorrendszer V-ben,

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Nyilván $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor generátorrendszer V-ben, ha V minden vektora függ tőle.

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
$v_1, \dots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \dots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \dots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Nyilván $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor generátorrendszer V-ben, ha V minden vektora függ tőle.

Állítás (F4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \dots, v_m \in V$.
$v_1, \dots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \dots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \dots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Nyilván $v_1, \dots, v_m$ akkor és csak akkor generátorrendszer V-ben, ha V minden vektora függ tőle.

Állítás (F4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Nyilván $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor generátorrendszer V-ben, ha V minden vektora függ tőle.

Állítás (F4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

Az üres halmaz lineárisan független!

Lineáris függés

Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen V vektortér a T test fölött és $v_1, \ldots, v_m \in V$.
$v_1, \ldots, v_m \in V$ lineárisan összefüggő, ha nem lineárisan független.
$v \in V$ lineárisan függ $v_1, \ldots, v_m$-től, ha felírható $v_1, \ldots, v_m$ lineáris kombinációjaként. Azaz ha $v \in \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$.

Nyilván $v_1, \ldots, v_m$ akkor és csak akkor generátorrendszer V-ben, ha V minden vektora függ tőle.

Állítás (F4.4.3. Tétel)

(1) Független rendszer része is független. (HF)

(2) Összefüggő rendszert tetszőleges vektorokkal kibővítve összefüggő rendszert kapunk. (HF)

Az üres halmaz lineárisan független! Ezért $\dim(\{0\}) = 0$.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m$

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$,
és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre
$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$,

Ha összefüggő, akkor valamelyik függ a többitől

Ha v függ $v_1, \ldots, v_m$-től, akkor $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő.

Mert $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m \implies \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + (-1)v = 0$, és ez nemtriviális lineáris kombináció a -1 együttható miatt.

1. Lemma (F4.4.3. Tétel III.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggő, akkor VAN közöttük olyan, amely lineárisan függ a többiektől.

Az nem igaz, hogy mindegyik függ a többiektől!
Például $0, v$ összefügg, de ha $v \neq 0$, akkor v nem függ 0-tól.

Bizonyítás (egyszerűbb jelölés miatt $n = 3$-ra)

v_1, v_2, v_3 összefüggő, így van olyan $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$, melyre $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0$, de nem mindegyik λ_j nulla.
Ha például $\lambda_2 \neq 0$, akkor $v_2 = -(\lambda_1/\lambda_2)v_1 - (\lambda_3/\lambda_2)v_3$. $\square$

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \dots, v_m$ független, de $v_1, \dots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \dots, v_m$-től.

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$. Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$. Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene
(hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll).

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll).
Ezért v kifejezhető,

A függés és függetlenség további kapcsolata

2. Lemma (F4.4.3. Tétel IV.)

Ha $v_1, \ldots, v_m$ független, de $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, akkor v (az, amelyik biztosan) függ $v_1, \ldots, v_m$-től.

Bizonyítás

Mivel $v_1, \ldots, v_m, v$ összefüggő, van olyan $\lambda_1, \ldots, \lambda_m, \lambda$, hogy nem mindegyik nulla, de $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m + \lambda v = 0$.
Láttuk, hogy az ilyen egyenletből azok a vektorok kifejezhetők, amelyek együtthatója nem nulla.
De itt λ biztosan nem nulla, mert ha $\lambda = 0$ lenne, akkor $v_1, \ldots, v_m$ lineárisan összefüggene (hiszen ekkor $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_m v_m = 0$, és a bal oldalon nemtriviális lineáris kombináció áll).
Ezért v kifejezhető, azaz függ $v_1, \ldots, v_m$-től. $\square$

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.
Legnagyobb elem nincs,

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.
Legnagyobb elem nincs, $\{1,2,3\}$ és $\{3,4\}$ a maximális elemek.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.
Legnagyobb elem nincs, $\{1,2,3\}$ és $\{3,4\}$ a maximális elemek.
Legszűkebb eleme van, az üres halmaz,

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.
Legnagyobb elem nincs, $\{1,2,3\}$ és $\{3,4\}$ a maximális elemek.
Legszűkebb eleme van, az üres halmaz, és ez minimális is.

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.
Legnagyobb elem nincs, $\{1,2,3\}$ és $\{3,4\}$ a maximális elemek.
Legszűkebb eleme van, az üres halmaz, és ez minimális is.

Ha egy elem legnagyobb, akkor maximális is,

Maximális és minimális halmazok

Definíció

Legyen $\mathcal{H}$ halmazrendszer (halmazokból álló halmaz).
Az $L \in \mathcal{H}$ legnagyobb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemét tartalmazza.
Az $L \in \mathcal{H}$ legszűkebb elem, ha $\mathcal{H}$ minden elemének része.
Az $M \in \mathcal{H}$ maximális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban M-et valódi módon tartalmazó halmaz. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \supseteq M$, akkor $H = M$.
Az $M \in \mathcal{H}$ minimális elem, ha nincs $\mathcal{H}$-ban olyan halmaz, ami M-nek valódi része. Azaz ha $H \in \mathcal{H}$ és $H \subseteq M$, akkor $H = M$.

Példa

Legyen $\mathcal{H} = \{\emptyset, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{3,4\}\}$.
Legnagyobb elem nincs, $\{1,2,3\}$ és $\{3,4\}$ a maximális elemek.
Legszűkebb eleme van, az üres halmaz, és ez minimális is.

Ha egy elem legnagyobb, akkor maximális is, de fordítva nem.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben,

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer,

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.

Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től,

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő.
Tehát $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő.
Tehát $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő.
Tehát $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben,
ha maximális független rendszer, azaz független,
de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től,
mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő.
Tehát $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő.
De $b_1, \ldots, b_n$ független,

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő.
Tehát $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő.
De $b_1, \ldots, b_n$ független, így a 2. Lemma miatt v függ $b_1, \ldots, b_n$-től.

Bázis = maximális független

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha maximális független rendszer, azaz független, de bármely vektort hozzávéve már összefüggő lesz.

Bizonyítás

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor maximális független.
Valóban, ha $v \in V$, akkor v függ $b_1, \ldots, b_n$-től, mert $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer. Ezért $b_1, \ldots, b_n, v$ összefüggő. Tehát $b_1, \ldots, b_n$ maximális független.
Ha $b_1, \ldots, b_n$ maximális független, akkor generátorrendszer is.
Valóban, ha $v \in V$, akkor $b_1, \ldots, b_n, v$ már összefüggő. De $b_1, \ldots, b_n$ független, így a 2. Lemma miatt v függ $b_1, \ldots, b_n$-től. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ generátorrendszer is. $\square$

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \dots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \ldots, b_n \rangle = W$.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \dots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \dots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq W$,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \ldots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq W$

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \ldots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq W$ (mert $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ a „legszűkebb" $\{b_1, \ldots, b_n\}$-et tartalmazó altér).

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \ldots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq W$ (mert $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ a „legszűkebb" $\{b_1, \ldots, b_n\}$-et tartalmazó altér). De $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle = V$,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \dots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \dots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \dots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \dots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \dots, b_n \rangle \subseteq W$ (mert $\langle b_1, \dots, b_n \rangle$ a „legszűkebb" $\{b_1, \dots, b_n\}$-et tartalmazó altér). De $\langle b_1, \dots, b_n \rangle = V$, és így $V \subseteq W = \langle b_2, \dots, b_n \rangle$.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \ldots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq W$ (mert $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ a „legszűkebb" $\{b_1, \ldots, b_n\}$-et tartalmazó altér). De $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle = V$, és így $V \subseteq W = \langle b_2, \ldots, b_n \rangle$. Így $b_2, \ldots, b_n$ generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (egyik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer, akkor független is.
Valóban, ha összefüggene, akkor az 1. Lemma miatt valamelyik b_i, mondjuk b_1 függene a többiektől.
Azaz $b_1 \in \langle b_2, \ldots, b_n \rangle = W$. Ezért $\{b_1, \ldots, b_n\} \subseteq W$, és így $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle \subseteq W$ (mert $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle$ a „legszűkebb" $\{b_1, \ldots, b_n\}$-et tartalmazó altér). De $\langle b_1, \ldots, b_n \rangle = V$, és így $V \subseteq W = \langle b_2, \ldots, b_n \rangle$. Így $b_2, \ldots, b_n$ generátorrendszer, ami ellentmond $b_1, \ldots, b_n$ minimalitásának.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben,
ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene.

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer. □

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer. $\square$

Megjegyzés: Így minden minimális generátorrendszer elemszáma,

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer. □

Megjegyzés: Így minden minimális generátorrendszer elemszáma, és minden maximális független rendszer elemszáma ugyanaz:

Bázis = minimális generátorrendszer

Állítás (F4.5.3. Feladat)

A $b_1, \ldots, b_n$ akkor és csak akkor bázis a V vektortérben, ha minimális generátorrendszer, azaz ha generátorrendszer, de bármely vektort kidobva már nem generátorrendszer.

Bizonyítás (másik irány)

Ha $b_1, \ldots, b_n$ bázis, akkor minimális generátorrendszer.
Valóban, ha például b_1-et elhagyjuk, akkor $b_2, \ldots, b_n$ már nem generátorrendszer, mert ha b_1 függne tőle, akkor $b_1, \ldots, b_n$ összefüggene. Ezért $b_1, \ldots, b_n$ minimális generátorrendszer. $\square$

Megjegyzés: Így minden minimális generátorrendszer elemszáma, és minden maximális független rendszer elemszáma ugyanaz: a vektortér dimenziója.

Bázis készítése

Következmény (F4.5.7. Tétel)

Végesen (mondjuk n elemmel) generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bázis készítése

Következmény (F4.5.7. Tétel)

Végesen (mondjuk n elemmel) generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá vektorokat, amíg maximális független nem lesz.

Bázis készítése

Következmény (F4.5.7. Tétel)

Végesen (mondjuk n elemmel) generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá vektorokat, amíg maximális független nem lesz. Ez legfeljebb n lépésben véget ér. $\square$

Bázis készítése

Következmény (F4.5.7. Tétel)

Végesen (mondjuk n elemmel) generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá vektorokat, amíg maximális független nem lesz. Ez legfeljebb n lépésben véget ér. $\square$

Következmény (F4.5.6. Tétel)

Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bázis készítése

Következmény (F4.5.7. Tétel)

Végesen (mondjuk n elemmel) generált vektortérben bármely független rendszer kiegészíthető bázissá.

Bizonyítás

Vegyünk hozzá vektorokat, amíg maximális független nem lesz. Ez legfeljebb n lépésben véget ér. □

Következmény (F4.5.6. Tétel)

Bármely véges generátorrendszer tartalmaz bázist.

Bizonyítás

Hagyjunk el belőle, míg minimális generátorrendszer nem lesz. □

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer,

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben,

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Indirekt feltevés: $m = n$.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Indirekt feltevés: $m = n$. Ekkor $b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is,

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Indirekt feltevés: $m = n$. Ekkor $b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is, és így bázis.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Indirekt feltevés: $m = n$. Ekkor $b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is, és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is,

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Indirekt feltevés: $m = n$. Ekkor $b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is, és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is, de W-ben is.

Valódi altér dimenziója

Tétel (F4.6.4. Tétel)

Legyen V véges dimenziós vektortér és W valódi, vagyis az egész V-től különböző altér. Ekkor $\dim W < \dim V$.

Emlékeztető: független elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

Bizonyítás

Legyen $\dim(V) = n$. Ekkor W-ben minden független rendszer független V-ben is, ezért legfeljebb n elemű.
Így W-ben van maximális független $b_1, \ldots, b_m$ rendszer, ami tehát bázis W-ben, és $m \leq n$. Ekkor $\dim W = m$.
Indirekt feltevés: $m = n$. Ekkor $b_1, \ldots, b_m$ maximális független rendszer V-ben is, és így bázis. Tehát generátorrendszer V-ben is, de W-ben is. Ezért az általa generált altér W is és V is, azaz $W = V$, ellentmondás. $\square$

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer **rangja** az általa generált altér dimenziója.

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független,

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben.

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független,

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A korábbi 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A korábbi 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
Ezért $\langle F\rangle$ egy X-et tartalmazó altér, és így tartalmazza $\langle X\rangle$-et.

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \dots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A korábbi 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
Ezért $\langle F \rangle$ egy X-et tartalmazó altér, és így tartalmazza $\langle X \rangle$-et.
Vagyis F bázis $\langle X \rangle$-ben,

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A korábbi 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
Ezért $\langle F \rangle$ egy X-et tartalmazó altér, és így tartalmazza $\langle X \rangle$-et.
Vagyis F bázis $\langle X \rangle$-ben, és így F elemszáma az X rangja. $\square$

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A korábbi 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
Ezért $\langle F \rangle$ egy X-et tartalmazó altér, és így tartalmazza $\langle X \rangle$-et.
Vagyis F bázis $\langle X \rangle$-ben, és így F elemszáma az X rangja. □

Azaz a rang a maximális függetlenek elemszáma.

A rang definíciója

Definíció

Egy vektorrendszer rangja az általa generált altér dimenziója.

Tétel

Az $X = \{v_1, \ldots, v_n\}$ rangja akkor r, ha van közöttük r darab lineárisan független, de r-nél több lineárisan független nincs.

Bizonyítás

Legyen F maximális független rendszer X-ben. Azaz
F független, de X bármely elemével kibővítve már összefüggő.
A korábbi 2. Lemma miatt X minden eleme függ F-től.
Ezért $\langle F\rangle$ egy X-et tartalmazó altér, és így tartalmazza $\langle X\rangle$-et.
Vagyis F bázis $\langle X\rangle$-ben, és így F elemszáma az X rangja. $\square$

Azaz a rang a maximális függetlenek elemszáma. Jele: $r(X)$.

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$,

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix},$

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1,

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független,

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg,

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa.

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$,

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

Tétel (HF)

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lineárisan független vektorrendszer,

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

Tétel (HF)

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

Tétel (HF)

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

Tétel (HF)

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát.

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

Tétel (HF)

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát.

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ tetszőleges vektorrendszer,

A rang tulajdonságai

Példa: a $v_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ rendszer rangja 1, mert v_1 önmagában független, de bármely két vektor lineárisan összefügg, hiszen mindegyik vektor a v_1 skalárszorosa. A maximális függetlenek: $\{v_1\}$, $\{v_2\}$, $\{v_4\}$, mindegyik 1 elemű.

Tétel (HF)

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ lineárisan független vektorrendszer, akkor ez lineárisan független marad, ha

(1) Az egyik vektort egy nem nulla skalárral megszorozzuk.

(2) Az egyik vektorból kivonjuk egy másik skalárszorosát.

Ha $X = \{v_1, \ldots, v_m\}$ tetszőleges vektorrendszer, akkor az (1) és (2) lépéseknél $\langle X \rangle$ és így $r(X)$ nem változik.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$,

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix},$

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt az

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m = 0 \end{gathered}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt az

$$\begin{gathered} a_{11}x_1 + \dots + a_{1m}x_m = 0 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2m}x_m = 0 \\ \dots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nm}x_m = 0 \end{gathered}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja a vezéregyesek száma.

A rang kiszámítása Gauss-eliminációval

Tétel

Legyen $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix}$.

Végezzük el a Gauss-eliminációt az

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1m}x_m &= 0 \\ a_{21}x_1 + \ldots + a_{2m}x_m &= 0 \\ &\dots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m &= 0 \end{aligned}$$

homogén lineáris egyenletrendszer esetében.

Ekkor a $v_1, \dots, v_m$ rendszer rangja a vezéregyesek száma.

Bizonyítás: Algebra és Számelmélet kurzus, 18. dia.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \ : \ u \in U, \ w \in W\}$ is altér.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \ : \ u \in U, \ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \, : \, u \in U, \; w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \; : \; u \in U, \; w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1, \;\; u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \,:\, u \in U,\ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1,\ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$,

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \ : \ u \in U, \ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1, \ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér,

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w : u \in U, w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1, \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \,:\, u \in U,\ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1,\ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) =$

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \,:\, u \in U,\ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1,\ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \ : \ u \in U,\ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1,\ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.
Azaz $U + W$ zárt az összeadásra.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \ : \ u \in U, \ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1, \ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.
Azaz $U + W$ zárt az összeadásra.
A λ-szorosra való zártság bizonyítása hasonló: HF. $\square$

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \ : \ u \in U, \ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1, \ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$,
akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.
Azaz $U + W$ zárt az összeadásra.
A λ-szorosra való zártság bizonyítása hasonló: HF. □

$U + W$ a legszűkebb U-t és W-t tartalmazó altér.

Alterek összege

Állítás

Legyenek U és W alterek a V vektortérben.
Ekkor $U + W = \{u + w \ : \ u \in U, \ w \in W\}$ is altér.
Ez az U és W alterek összege.

Bizonyítás

$U + W$ nem üres, mert $0 = 0 + 0$ benne van.
Ha $u_1 + w_1, \ \ u_2 + w_2 \in U + W$, ahol $u_1, u_2 \in U$ és $w_1, w_2 \in W$, akkor $u_1 + u_2 \in U$, mert U altér, és $w_1 + w_2 \in W$, mert W altér.
Ezért $(u_1 + w_1) + (u_2 + w_2) = (u_1 + u_2) + (w_1 + w_2) \in U + W$.
Azaz $U + W$ zárt az összeadásra.
A λ-szorosra való zártság bizonyítása hasonló: HF. $\square$

$U + W$ a legszűkebb U-t és W-t tartalmazó altér. Hiszen minden ilyen altér tartalmazza az $u + w$ alakú összegeket.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U+W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U+W$ az xy sík, vagyis az $(x,y,0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x,y,0)=(x,0,0)+(0,y,0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U+W=\mathbb{R}[x]$,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$.
$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$.
$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ felső,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$.
$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$.
$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.

Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2\times 2}$,

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$.
$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U + W$ az xy sík, vagyis az $(x, y, 0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x, y, 0) = (x, 0, 0) + (0, y, 0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x) = \big(f(x) - f(1)\big) + f(1)$.
$U \cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.
Ekkor $U + W = \mathbb{R}^{2\times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.
$U \cap W$ a diagonális mátrixok.

Példák alterek összegére

Legyen a térben U az x-tengely és W az y-tengely.
$U+W$ az xy sík, vagyis az $(x,y,0)$ alakú pontok halmaza.
Mert $(x,y,0)=(x,0,0)+(0,y,0)$ (és ez egyértelmű is).

Álljon U az $\mathbb{R}[x]$ azon elemeiből, melyeknek az 1 gyöke.
Álljon W az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeiből.
Ekkor $U+W=\mathbb{R}[x]$, hiszen $f(x)=\big(f(x)-f(1)\big)+f(1)$.
$U\cap W$ azon legfeljebb másodfokúak, melyeknek 1 gyöke.

Álljon U az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ felső, W az $\mathbb{R}^{2\times 2}$ alsó háromszögmátrixaiból.
Ekkor $U+W=\mathbb{R}^{2\times 2}$, hiszen $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ c & 0 \end{bmatrix}$.
$U\cap W$ a diagonális mátrixok.

HF*: $\dim(U+W)=\dim U+\dim W-\dim(U\cap W)$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n$

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = v^T w$.

$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.

$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.

Jele: $v \perp w$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Jele: $v \perp w$. A $v \in \mathbb{R}^n$ normája

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Jele: $v \perp w$. A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.

$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.

Jele: $v \perp w$. A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \dots + a_n b_n = v^T w$.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Jele: $v \perp w$. A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
(Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.)

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Jele: $v \perp w$. A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
(Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.)

Állítás (F8.1. szakasz, HF)

Tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Jele: $v \perp w$. A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
(Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.)

Állítás (F8.1. szakasz, HF)

Tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ és $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$;

Skaláris szorzat és norma

Definíció (F8.1.1. és F8.2.1 Definíció)

Legyen $v = \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ és $w = \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Ekkor

v és w skaláris szorzata $\langle v, w \rangle = a_1 b_1 + \ldots + a_n b_n = v^T w$.
$v, w \in \mathbb{R}^n$ merőlegesek vagy ortogonálisak, ha $\langle v, w \rangle = 0$.
Jele: $v \perp w$. A $v \in \mathbb{R}^n$ normája vagy hossza $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$.
(Ez a síkon és a térben Pitagorasz tételéből világos.)

Állítás (F8.1. szakasz, HF)

Tetszőleges $u, v, w \in \mathbb{R}^n$ és $\lambda \in \mathbb{R}$ esetén

(1) $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$ és $\langle w, u + v \rangle = \langle w, u \rangle + \langle w, v \rangle$;

(2) $\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$ és $\langle w, \lambda v \rangle = \lambda \langle w, v \rangle$.

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben,

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis,

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1,

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re,

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.
(Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.
(Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.
(Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$,

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.
(Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.
(Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva
$\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \ldots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle =$

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \dots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.
(Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \dots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva
$\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \dots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle =$

Ortonormált bázis

Definíció (F8.1.4. Definíció)

A $b_1, \ldots, b_n$ ortonormált bázis, ONB $\mathbb{R}^n$-ben, ha bázis, mindegyik b_i hossza 1, és bármely kettő merőleges.
Képletben: $\|b_i\| = 1$ minden i-re, és $\langle b_i, b_j \rangle = 0$, ha $i \neq j$.
(Ez felel meg a szokásos, derékszögű koordinátarendszereknek.)

Állítás

Ortonormált bázisban $[v] = \begin{bmatrix} \langle v, b_1 \rangle \\ \ldots \\ \langle v, b_n \rangle \end{bmatrix}$.

Bizonyítás

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$, akkor b_i-vel skalárisan szorozva
$\langle v, b_i \rangle = \lambda_1 \langle b_1, b_i \rangle + \ldots + \lambda_n \langle b_n, b_i \rangle = \lambda_i \langle b_i, b_i \rangle = \lambda_i$. $\square$

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
|Független| $\leq$ dimenzió.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
$|\text{Független}| \leq$ dimenzió. $|\text{Generátorrendszer}| \geq$ dimenzió.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
|Független| $\leq$ dimenzió. |Generátorrendszer| $\geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
$|\text{Független}| \leq$ dimenzió. $|\text{Generátorrendszer}| \geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.
Bázis $=$ maximális független $=$ minimális generátorrendszer.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
$|\text{Független}| \leq$ dimenzió. $|\text{Generátorrendszer}| \geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.
Bázis $=$ maximális független $=$ minimális generátorrendszer.
Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
|Független| $\leq$ dimenzió. |Generátorrendszer| $\geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.
Bázis = maximális független = minimális generátorrendszer.
Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója.
Vektorrendszer rangja a maximális függetlenek elemszáma.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
$|\text{Független}| \leq$ dimenzió. $|\text{Generátorrendszer}| \geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.
Bázis $=$ maximális független $=$ minimális generátorrendszer.
Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója.
Vektorrendszer rangja a maximális függetlenek elemszáma.
A rang kiszámítása Gauss-eliminációval.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
|Független| $\leq$ dimenzió. |Generátorrendszer| $\geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.
Bázis = maximális független = minimális generátorrendszer.
Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója.
Vektorrendszer rangja a maximális függetlenek elemszáma.
A rang kiszámítása Gauss-eliminációval.
Alterek összegének dimenziója.

A 2. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Vektor koordinátái bázisban. Lineáris függés. Halmazrendszer legnagyobb, legszűkebb, maximális és minimális eleme. Vektorrendszer rangja. Alterek összege. Skaláris szorzat, hossz, merőlegesség. Ortonormált bázis.

Tételek

Független rendszer elemszáma $\leq$ generátorrendszer elemszáma.
|Független| $\leq$ dimenzió. |Generátorrendszer| $\geq$ dimenzió.
A függést és függetlenséget összekapcsoló két lemma.
Bázis $=$ maximális független $=$ minimális generátorrendszer.
Valódi altér dimenziója kisebb, mint a tér dimenziója.
Vektorrendszer rangja a maximális függetlenek elemszáma.
A rang kiszámítása Gauss-eliminációval.
Alterek összegének dimenziója. Vektor koordinátái ONB-ben.