Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

18.* előadás

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk,

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást,

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza ($\lambda_i \in T$).
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza ($\lambda_i \in T$).
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor
$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)1 + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)a$.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor
$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)1 + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)a$.
$b_1 = (1 + a)/2$, $b_2 = (1 - a)/2$ bázis,

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor
$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)1 + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)a$.
$b_1 = (1 + a)/2$, $b_2 = (1 - a)/2$ bázis, $b_1^2 = b_1$,

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor
$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)1 + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)a$.
$b_1 = (1 + a)/2$, $b_2 = (1 - a)/2$ bázis, $b_1^2 = b_1$, $b_2^2 = b_2$,

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \dots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor
$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)1 + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)a$.
$b_1 = (1 + a)/2$, $b_2 = (1 - a)/2$ bázis, $b_1^2 = b_1$, $b_2^2 = b_2$, $b_1 b_2 = 0$.

A csoportalgebra

Definíció (7.9. Szakasz)

Legyen $G = \{1 = g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ véges csoport és T test.
$T[G]$ a $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i g_i$ formális lineáris kombinációk halmaza $(\lambda_i \in T)$.
Ez vektortér T fölött, $\{g_1, g_2, \ldots, g_n\}$ bázis.
A szorzást végezzük úgy, hogy a szorzatot a disztributivitás segítségével kibontjuk, elvégezzük a G-beli szorzást, majd összevonunk. Ekkor egységelemes algebrát kapunk T fölött.
Ez a csoportalgebra. Tipikusan $T = \mathbb{C}$.

Példa

Legyen $G = \{1, a\} \cong \mathbb{Z}_2^+$. Ekkor
$(\lambda_1 1 + \mu_1 a)(\lambda_2 1 + \mu_2 a) = (\lambda_1\lambda_2 + \mu_1\mu_2)1 + (\lambda_1\mu_2 + \mu_1\lambda_2)a$.
$b_1 = (1 + a)/2$, $b_2 = (1 - a)/2$ bázis, $b_1^2 = b_1$, $b_2^2 = b_2$, $b_1 b_2 = 0$.
Ezért $\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2 \leftrightarrow (\beta_1, \beta_2)$ gyűrűizomorfizmus $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$-vel.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk direkt szorzatával.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha G kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha G kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

Legyen $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \ldots \times R_k$, ahol $R_i \cong \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha G kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

Legyen $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \ldots \times R_k$, ahol $R_i \cong \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$.
Az i-edik projekció, ami $(r_1, \ldots, r_k)$-hoz r_i-t rendel,
egy $\varphi_i : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűhomomorfizmust ad.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha G kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

Legyen $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \ldots \times R_k$, ahol $R_i \cong \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$.
Az i-edik projekció, ami $(r_1, \ldots, r_k)$-hoz r_i-t rendel, egy $\varphi_i : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűhomomorfizmust ad. A G elemeire megszorítva ez egy $G \to \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$ csoporthomomorfizmus.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha G kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

Legyen $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \ldots \times R_k$, ahol $R_i \cong \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$.
Az i-edik projekció, ami $(r_1, \ldots, r_k)$-hoz r_i-t rendel,
egy $\varphi_i : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűhomomorfizmust ad. A G elemeire megszorítva ez egy $G \to \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$ csoporthomomorfizmus.
Ezek tökéletesen megfogják G szerkezetét.

A csoportalgebra felbontása

Tétel, csak a kommutatív esetet bizonyítjuk

Ha G véges csoport, akkor a $\mathbb{C}[G]$ csoportalgebra izomorf $\mathbb{C}$ fölötti teljes mátrixgyűrűk, azaz $\mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűk direkt szorzatával. A tényezők száma a G konjugált osztályainak a száma. Speciálisan ha G kommutatív, akkor $\mathbb{C}[G] \cong \mathbb{C}^n$, ahol $n = |G|$.

Legyen $\mathbb{C}[G] \cong R_1 \times \ldots \times R_k$, ahol $R_i \cong \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$.
Az i-edik projekció, ami $(r_1, \ldots, r_k)$-hoz r_i-t rendel,
egy $\varphi_i : \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}^{n_i \times n_i}$ gyűrűhomomorfizmust ad. A G elemeire megszorítva ez egy $G \to \mathrm{GL}(n_i, \mathbb{C})$ csoporthomomorfizmus.
Ezek tökéletesen megfogják G szerkezetét.

Definíció (475. oldal)

A G véges csoport $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$-be vezető homomorfizmusait a G (komplex fölötti) reprezentációinak nevezzük.

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).
$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a g-nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).
$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a g-nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

$$\varphi_3(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).
$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a g-nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

$$\varphi_3(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_3\left((123)\right) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).
$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a g-nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

$$\varphi_3(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_3((123)) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

$\varphi_3((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (az y-tengelyre való tükrözés).

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).
$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a g-nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

$$\varphi_3(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_3((123)) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

$\varphi_3((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ (az y-tengelyre való tükrözés).

Állítás (NB)

$\mathbb{C}[S_3] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2\times 2}$.

Az S_3 példája

Legyen $G = S_3$. Az alábbiak reprezentációk.
$\varphi_1 : g \mapsto 1 \in \mathbb{C} \cong \mathbb{C}^{1\times 1}$ nyilván homomorfizmus.
$\varphi_2 : g \mapsto \mathrm{sg}(g) \in \mathbb{C}$ is (előjelképzés).
$\varphi_3 : S_3 \cong D_3 \to \mathbb{R}^{2\times 2}$ a g-nek megfelelő transzformáció (forgatás, illetve tükrözés) mátrixa (rögzített bázisban).

$$\varphi_3(id) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \varphi_3((123)) = \begin{pmatrix} \cos 120^\circ & -\sin 120^\circ \\ \sin 120^\circ & \cos 120^\circ \end{pmatrix}$$

$$\varphi_3((12)) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ (az y-tengelyre való tükrözés).

Állítás (NB)

$\mathbb{C}[S_3] \cong \mathbb{C} \times \mathbb{C} \times \mathbb{C}^{2\times 2}$.
A három projekció a fenti három reprezentációnak felel meg.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba,

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor

$$(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g) \text{ is az.}$$

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor pontonkénti összegük: $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ is az.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}^+$.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi+\psi)(g)=\varphi(g)+\psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G,H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+,\mathbb{Z}^+)\cong\mathbb{Z}^+$.

Ha $\varphi(1)=m$, akkor $\varphi(n\cdot 1)=nm$.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}^+$.

Ha $\varphi(1) = m$, akkor $\varphi(n \cdot 1) = nm$. Ez egy φ_m homomorfizmus.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi+\psi)(g)=\varphi(g)+\psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G,H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+,\mathbb{Z}^+)\cong\mathbb{Z}^+$.

Ha $\varphi(1)=m$, akkor $\varphi(n\cdot 1)=nm$. Ez egy φ_m homomorfizmus.
Vagyis $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+,\mathbb{Z}^+)$ elemei a φ_m-ek (m-mel szorzások).

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}^+$.

Ha $\varphi(1) = m$, akkor $\varphi(n \cdot 1) = nm$. Ez egy φ_m homomorfizmus.
Vagyis $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+)$ elemei a φ_m-ek (m-mel szorzások).
Nyilván $\varphi_{m+k} = \varphi_m + \varphi_k$.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi + \psi)(g) = \varphi(g) + \psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G, H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+) \cong \mathbb{Z}^+$.

Ha $\varphi(1) = m$, akkor $\varphi(n \cdot 1) = nm$. Ez egy φ_m homomorfizmus.
Vagyis $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+)$ elemei a φ_m-ek (m-mel szorzások).
Nyilván $\varphi_{m+k} = \varphi_m + \varphi_k$.
Ezért $m \to \varphi_m$ izomorfizmus $\mathbb{Z}^+$ és $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{Z}^+)$ között.

Homomorfizmusok csoportjai

7.7.1. Definíció

Legyenek G és H Abel-csoportok.
Ha φ és ψ homomorfizmusok G-ből H-ba, akkor
pontonkénti összegük: $(\varphi+\psi)(g)=\varphi(g)+\psi(g)$ is az.
Csoportot alkotnak (mint lineáris algebrában), jele $\mathrm{Hom}(G,H)$.

Példa (7.7.7. Gyakorlat)

$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+,\mathbb{Z}^+)\cong\mathbb{Z}^+$.

Ha $\varphi(1)=m$, akkor $\varphi(n\cdot 1)=nm$. Ez egy φ_m homomorfizmus.
Vagyis $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+,\mathbb{Z}^+)$ elemei a φ_m-ek (m-mel szorzások).
Nyilván $\varphi_{m+k}=\varphi_m+\varphi_k$.
Ezért $m\to\varphi_m$ izomorfizmus $\mathbb{Z}^+$ és $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}^+,\mathbb{Z}^+)$ között.
HF: $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}_4^+,\mathbb{Z}_6^+)\cong\mathbb{Z}_2^+$ (7.7.8. Kérdés).

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$. Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.
Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.
Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.
Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.
Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz.
Nyilván $\chi_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1}\chi_{\varepsilon_2}$,

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.
Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.
Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz.
Nyilván $\chi_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1}\chi_{\varepsilon_2}$, hiszen az 1-et mindkettő $\varepsilon_1\varepsilon_2$-be viszi.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.
Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.
Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz.
Nyilván $\chi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1} \chi_{\varepsilon_2}$, hiszen az 1-et mindkettő $\varepsilon_1 \varepsilon_2$-be viszi.
Ezért $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^d = 1\} \leq \mathbb{C}^\times$.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.
Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.
Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz.
Nyilván $\chi_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1}\chi_{\varepsilon_2}$, hiszen az 1-et mindkettő $\varepsilon_1\varepsilon_2$-be viszi.
Ezért $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^d = 1\} \leq \mathbb{C}^\times$.
Ez pontosan a d-edik egységgyökök részcsoportja,

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.
Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.
Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz.
Nyilván $\chi_{\varepsilon_1 \varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1} \chi_{\varepsilon_2}$, hiszen az 1-et mindkettő $\varepsilon_1 \varepsilon_2$-be viszi.
Ezért $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^d = 1\} \leq \mathbb{C}^\times$.
Ez pontosan a d-edik egységgyökök részcsoportja, ami ciklikus, bármelyik d-edik primitív egységgyök generálja.

Abel-csoport duálisa

Tétel

Ha G véges Abel-csoport, akkor $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$.
(A homomorfizmusokat most pontonként szorozni kell.)

Bizonyítás

Tegyük föl először, hogy $G = \mathbb{Z}_d^+$. Ha $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$, akkor legyen $\chi(1) = \varepsilon$. Nyilván $\chi(n) = \chi(n \cdot 1) = \varepsilon^n$ és így $\varepsilon^d = 1$.
Ez egyértelműen meghatározza χ-t, jelölje ezt a leképezést χ_ε.
Megfordítva, ha $\varepsilon^d = 1$, akkor $\chi_\varepsilon : n \to \varepsilon^n$ homomorfizmus lesz.
Nyilván $\chi_{\varepsilon_1\varepsilon_2} = \chi_{\varepsilon_1}\chi_{\varepsilon_2}$, hiszen az 1-et mindkettő $\varepsilon_1\varepsilon_2$-be viszi.
Ezért $\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong \{\varepsilon \in \mathbb{C} : \varepsilon^d = 1\} \leq \mathbb{C}^\times$.
Ez pontosan a d-edik egységgyökök részcsoportja, ami ciklikus, bármelyik d-edik primitív egységgyök generálja. Ezért $\widehat{G} \cong \mathbb{Z}_d^+$.

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$

$\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.

$\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.

$\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi\big((g, 1_H)\big)$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi\big((1_G, h)\big)$,

$\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi\big((g, 1_H)\big)$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi\big((1_G, h)\big)$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.

$\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$,

$\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$,

□

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.

$\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.
HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. $\square$

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.
HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. $\square$

$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$ bizonyítása:

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.
HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. $\square$

$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$ bizonyítása: Bontsuk G-t a véges Abel-csoportok alaptétele szerint (prímhatványrendű) ciklikus csoportok direkt szorzatára,

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.
HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. □

$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$ bizonyítása: Bontsuk G-t a véges Abel-csoportok alaptétele szerint (prímhatványrendű) ciklikus csoportok direkt szorzatára, és alkalmazzuk a fenti állítást. □

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.
HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. $\square$

$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$ bizonyítása: Bontsuk G-t a véges Abel-csoportok alaptétele szerint (prímhatványrendű) ciklikus csoportok direkt szorzatára, és alkalmazzuk a fenti állítást. $\square$

Név: $\widehat{G}$ a G duálisa.

Direkt szorzat és Hom

7.7.11. Feladat

$\mathrm{Hom}(G \times H, K) \cong \mathrm{Hom}(G, K) \times \mathrm{Hom}(H, K)$ (itt G, H, K Abel).

Bizonyítás

Legyen $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$ és $G^* = \{(g, 1_H) : g \in G\} \cong G$.
Ekkor $\varphi_1(g) = \varphi((g, 1_H))$ egy $G \to K$ homomorfizmust definiál.
Hasonlóan legyen $\varphi_2(h) = \varphi((1_G, h))$, ekkor $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$.
Megfordítva, ha $\varphi_1 \in \mathrm{Hom}(G, K)$ és $\varphi_2 \in \mathrm{Hom}(H, K)$, akkor legyen $\varphi((g, h)) = \varphi_1(g) + \varphi_2(h)$, erre $\varphi \in \mathrm{Hom}(G \times H, K)$.
HF: $\varphi \leftrightarrow (\varphi_1, \varphi_2)$ egy megfelelő izomorfizmus. □

$\widehat{G} = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times) \cong G$ bizonyítása: Bontsuk G-t a véges Abel-csoportok alaptétele szerint (prímhatványrendű) ciklikus csoportok direkt szorzatára, és alkalmazzuk a fenti állítást. □

Név: $\widehat{G}$ a G duálisa. Folytonos csoportokra: Pontrjagin-dualitás.

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi.

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi.
Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha g_0-lal végigszorozzuk G elemeit,

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha g_0-lal végigszorozzuk G elemeit, akkor G minden elemét egyszer kapjuk meg.

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha g_0-lal végigszorozzuk G elemeit, akkor G minden elemét egyszer kapjuk meg. Ezért
$S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g) = \chi(g_0) S$.

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha g_0-lal végigszorozzuk G elemeit, akkor G minden elemét egyszer kapjuk meg. Ezért
$S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g) = \chi(g_0) S$.
Mivel $\chi(g_0) \neq 1$, ezért $S = 0$. $\square$

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha g_0-lal végigszorozzuk G elemeit, akkor G minden elemét egyszer kapjuk meg. Ezért
$S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g) = \chi(g_0) S$.
Mivel $\chi(g_0) \neq 1$, ezért $S = 0$. □

Következmény

Ha $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$, akkor $\sum_{g \in G} \chi(g^{-1}) \psi(g) = 0$.

Ortogonalitás

$\mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$ elemei a G Abel-csoport 1-dimenziós reprezentációi. Másik elnevezés: csoportkarakterek (csak ha G kommutatív!).

Legyen $\chi \in \widehat{G}$. Ekkor $\sum_{g \in G} \chi(g)$ értéke 0, ha χ nem azonosan 1.

Valóban: legyen $\chi(g_0) \neq 1$. Ha g_0-lal végigszorozzuk G elemeit, akkor G minden elemét egyszer kapjuk meg. Ezért
$S = \sum_{g \in G} \chi(g) = \sum_{g \in G} \chi(g_0 g) = \chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g) = \chi(g_0) S$.
Mivel $\chi(g_0) \neq 1$, ezért $S = 0$. □

Következmény

Ha $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$, akkor $\sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g) = 0$.

Valóban: $\chi(g^{-1})\psi(g)$ a $\chi^{-1}\psi \in \widehat{G}$-nek a g-nél felvett értéke. □

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n,

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve,

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*\big((1/n)S\big) = E$ (az egységmátrix),

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^* \big((1/n)S\big) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*((1/n)S) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et.

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$). Ekkor $S^*((1/n)S) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*\big((1/n)S\big) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.
Az ortogonalitás miatt S^*S diagonális mátrix.

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*\big((1/n)S\big) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.
Az ortogonalitás miatt S^*S diagonális mátrix.
A főátlóban $\chi(g^{-1})\chi(g) = 1$ miatt n áll. $\square$

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*((1/n)S) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.
Az ortogonalitás miatt S^*S diagonális mátrix.
A főátlóban $\chi(g^{-1})\chi(g) = 1$ miatt n áll. □

Tekintsük $(1/n)S$-et egy bázistranszformáció áttérési mátrixának.

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n\times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*\big((1/n)S\big) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.
Az ortogonalitás miatt S^*S diagonális mátrix.
A főátlóban $\chi(g^{-1})\chi(g) = 1$ miatt n áll. □

Tekintsük $(1/n)S$-et egy bázistranszformáció áttérési mátrixának.
A $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ a régi bázis,

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*\big((1/n)S\big) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.
Az ortogonalitás miatt S^*S diagonális mátrix.
A főátlóban $\chi(g^{-1})\chi(g) = 1$ miatt n áll. $\square$

Tekintsük $(1/n)S$-et egy bázistranszformáció áttérési mátrixának.
A $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ a régi bázis, az új bázis elemei:
$b_\chi = (1/n)\sum_{g \in G} \chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$, ahol $\chi \in \widehat{G}$.

A karaktertábla, mint mátrix

Állítás

Legyen G Abel-csoport, rendje n, és $S \in \mathbb{C}^{n \times n}$ az a mátrix, ahol a sorok G elemeivel, az oszlopok $\widehat{G}$ elemeivel vannak indexelve, és a g-edik sor χ-edik eleme $\chi(g)$ (itt $g \in G$ és $\chi \in \widehat{G}$).
Ekkor $S^*((1/n)S) = E$ (az egységmátrix), azaz $(1/\sqrt{n})S$ unitér.

Bizonyítás

Számítsuk ki S^*S-et. Mivel $\chi(g)$ egységgyök, $\overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$.
Az ortogonalitás miatt S^*S diagonális mátrix.
A főátlóban $\chi(g^{-1})\chi(g) = 1$ miatt n áll. □

Tekintsük $(1/n)S$-et egy bázistranszformáció áttérési mátrixának.
A $G = \{g_1, \ldots, g_n\}$ a régi bázis, az új bázis elemei:
$b_\chi = (1/n)\sum_{g \in G} \chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$, ahol $\chi \in \widehat{G}$.
Ez tényleg bázis, mert S invertálható.

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$.

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G}\chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G} \chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f\in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$,

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f \in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$,
és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$,

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f \in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$,
és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f) \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$.

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f \in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$,
és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f) \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$.
Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$,

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G}\chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f\in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f}\chi(h)\psi(g)$, és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f)\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\psi(g)$. Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$.

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G}\chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f\in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f}\chi(h)\psi(g)$,
és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f)\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\psi(g)$.
Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$,
akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$,

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G}\chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f\in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f}\chi(h)\psi(g)$,
és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f)\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\psi(g)$.
Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$,
akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$, tehát $s_f = |G|\psi(f)$,

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G}\chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f\in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f}\chi(h)\psi(g)$, és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f)\sum_{g\in G}\chi(g^{-1})\psi(g)$. Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$, akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$, tehát $s_f = |G|\psi(f)$, és $b_\chi^2 = b_\chi$. □

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G} \chi(g)g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f\in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$, és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f)\sum_{g\in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$. Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$, akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$, tehát $s_f = |G|\psi(f)$, és $b_\chi^2 = b_\chi$. $\square$

Mivel a b_χ elemek bázist alkotnak, a csoportalgebra minden eleme egyértelműen felírható $\sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi$ alakban ($X_\chi \in \mathbb{C}$).

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^{\times})$-re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f \in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$,
és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f) \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$.
Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$, akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$, tehát $s_f = |G|\psi(f)$, és $b_\chi^2 = b_\chi$. □

Mivel a b_χ elemek bázist alkotnak, a csoportalgebra minden eleme egyértelműen felírható $\sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi$ alakban ($X_\chi \in \mathbb{C}$).
Ezt $(\ldots, \mu_\chi, \ldots) \in \mathbb{C}^n$-nek megfeleltetve gyűrűizomorfizmust kapunk $\mathbb{C}[G]$ és a $\mathbb{C}^n$ direkt szorzat között.

A csoportalgebra felbontása

Állítás

Legyen $\chi \in \mathrm{Hom}(G, \mathbb{C}^\times)$-re $b_\chi = (1/n) \sum_{g \in G} \chi(g) g \in \mathbb{C}[G]$.
Ekkor $b_\chi^2 = b_\chi$ és $\chi \neq \psi \in \widehat{G}$ esetén $b_\chi b_\psi = 0$.

Valóban, $|G|^2 b_\chi b_\psi = \sum_{f \in G} s_f f$, ahol $s_f = \sum_{hg=f} \chi(h)\psi(g)$,
és $hg = f$ miatt $h = fg^{-1}$, így $s_f = \psi(f) \sum_{g \in G} \chi(g^{-1})\psi(g)$.
Az előzőek miatt ez nulla, ha $\chi \neq \psi$, és így $b_\chi b_\psi = 0$. Ha $\chi = \psi$,
akkor $\chi(g^{-1})\psi(g) = 1$, tehát $s_f = |G|\psi(f)$, és $b_\chi^2 = b_\chi$. □

Mivel a b_χ elemek bázist alkotnak, a csoportalgebra minden eleme egyértelműen felírható $\sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi$ alakban ($X_\chi \in \mathbb{C}$).
Ezt $(\ldots, \mu_\chi, \ldots) \in \mathbb{C}^n$-nek megfeleltetve
gyűrűizomorfizmust kapunk $\mathbb{C}[G]$ és a $\mathbb{C}^n$ direkt szorzat között.

Valóban, a szorzattartás a fenti összefüggések következménye. □

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g \in G} x_g g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathsf{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathsf{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,
továbbá $\mathsf{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathsf{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel,

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathrm{X} = (\dots, X_\chi, \dots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,
továbbá $\mathrm{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathrm{X} = (\dots, X_\chi, \dots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathrm{X} = (\dots, X_\chi, \dots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^* \mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n) S \mathrm{X}^T$.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,
továbbá $\mathrm{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathrm{X} = (\dots, X_\chi, \dots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^* \mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n) S \mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g \in G} x_g g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,
továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^* \mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n) S \mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g \in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n) \sum_{\chi \in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^* \mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n) S \mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\,\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathrm{X} = (\dots, X_\chi, \dots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (1/n)\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$,

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (1/n)\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$, azaz $\sum_{g\in G} \overline{x_g} y_g = (1/n)\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} Y_\chi$.

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$,
továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = (1/n)\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$, azaz $\sum_{g\in G} \overline{x_g} y_g = (1/n)\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} Y_\chi$.

(Parseval-formula,

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (1/n)\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$, azaz $\sum_{g\in G} \overline{x_g} y_g = (1/n)\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} Y_\chi$.
$\|\mathrm{x}\| = (1/n)\|\mathrm{X}\|$,
(Parseval-formula,

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^* \mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n) S \mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért
$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = (1/n) \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$, azaz $\sum_{g\in G} \overline{x_g} y_g = (1/n) \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} Y_\chi$.
$\|\mathrm{x}\| = (1/n) \|\mathrm{X}\|$, azaz $\sum_{g\in G} |x_g|^2 = (1/n) \sum_{\chi\in\widehat{G}} |X_\chi|^2$.
(Parseval-formula,

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathrm{X} = (\dots, X_\chi, \dots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^* \mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n) S \mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n) \sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\,\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért $\langle \mathrm{x}, \mathrm{y} \rangle = (1/n) \langle \mathrm{X}, \mathrm{Y} \rangle$, azaz $\sum_{g\in G} \overline{x_g} y_g = (1/n) \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} Y_\chi$.
$\|\mathrm{x}\| = (1/n) \|\mathrm{X}\|$, azaz $\sum_{g\in G} |x_g|^2 = (1/n) \sum_{\chi\in\widehat{G}} |X_\chi|^2$.
(Parseval-formula, illetve Plancherel-formula).

A Fourier-transzformáció mint bázistranszformáció

Az eddigi jelölésekkel legyen $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$, továbbá $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{X} = (\ldots, X_\chi, \ldots)$.
(Mostantól azonosítjuk az x vektort a $\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ elemmel, valamint azzal az $\mathrm{x} : G \to \mathbb{C}$ függvénnyel is, melyre $\mathrm{x}(g) = x_g$.)
Bázistranszformáció: $\mathrm{X}^T = S^*\mathrm{x}^T$ és $\mathrm{x}^T = (1/n)S\mathrm{X}^T$.
Azaz $X_\chi = \sum_{g\in G} \overline{\chi(g)} x_g$ és $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$.

$\mathcal{F} : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{X}$ a diszkrét Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{X} = \widehat{\mathrm{x}}$.
$\mathcal{F}^{-1} : \mathrm{X} \mapsto \mathrm{x}$ az inverz Fourier-transzformáció. Jele $\mathrm{x} = \widehat{\mathrm{X}}$.

Alaptulajdonságok: $(1/\sqrt{n})\mathcal{F}$ unitér transzformáció $\mathbb{C}^n$-en. Ezért
$\langle \mathrm{x}, \mathrm{y}\rangle = (1/n)\langle \mathrm{X}, \mathrm{Y}\rangle$, azaz $\sum_{g\in G} \overline{x_g} y_g = (1/n)\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} Y_\chi$.
$\|\mathrm{x}\| = (1/n)\|\mathrm{X}\|$, azaz $\sum_{g\in G} |x_g|^2 = (1/n)\sum_{\chi\in\widehat{G}} |X_\chi|^2$.
(Parseval-formula, illetve Plancherel-formula).
$\sum_{g\in G} x_g g \mapsto \mathrm{X}$ gyűrűhomomorfizmus $\mathbb{C}[G]$-ből $\mathbb{C}^n$-be.

Konvolúció

Legyen $x = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $y = (\ldots, y_g, \ldots)$,

Konvolúció

Legyen $x = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $y = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá
$(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$,

Konvolúció

Legyen $x = (\dots, x_g, \dots)$ és $y = (\dots, y_g, \dots)$, továbbá $(\sum_{g \in G} x_g g)(\sum_{g \in G} y_g g) = \sum_{g \in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f \in G} x_{gf^{-1}} y_f$.

Konvolúció

Legyen $x = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $y = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g \in G} x_g g)(\sum_{g \in G} y_g g) = \sum_{g \in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f \in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $z = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y konvolúciója,

Konvolúció

Legyen $x = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $y = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$. A $z = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y **konvolúciója**, jele $x * y$.

Konvolúció

Legyen $x = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $y = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $z = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y **konvoluciója**, jele $x * y$.
Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője.

Konvolúció

Legyen $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{y} = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $\mathrm{z} = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y konvoluciója, jele $\mathrm{x} * \mathrm{y}$.
Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője.
A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát
$\mathcal{F}(\mathrm{x} * \mathrm{y}) = \mathcal{F}(\mathrm{x})\,\mathcal{F}(\mathrm{y}) = (\ldots, \mathrm{X}_\chi \mathrm{Y}_\chi, \ldots)$ (pontonkénti szorzás).

Konvolúció

Legyen $x = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $y = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g \in G} x_g g)(\sum_{g \in G} y_g g) = \sum_{g \in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f \in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $z = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y **konvolúciója**, jele $x * y$.
Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője.
A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát
$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x)\,\mathcal{F}(y) = (\ldots, X_\chi Y_\chi, \ldots)$ (pontonkénti szorzás).

A konvolúció tulajdonságai

- Mindkét változóban lineáris $\mathbb{C}$ fölött, kommutatív, asszociatív.

Konvolúció

Legyen $x = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $y = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $z = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y **konvolúciója**, jele $x * y$.
Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője.
A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát
$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x)\,\mathcal{F}(y) = (\ldots, X_\chi Y_\chi, \ldots)$ (pontonkénti szorzás).

A konvolúció tulajdonságai

- Mindkét változóban lineáris $\mathbb{C}$ fölött, kommutatív, asszociatív.
- Van egységelem: $x_1 = 1$ és $x_g = 0$ $(g \neq 1)$ megfelelő.

Konvolúció

Legyen $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{y} = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $\mathrm{z} = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y konvolúciója, jele $\mathrm{x} * \mathrm{y}$.
Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője.
A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát
$\mathcal{F}(\mathrm{x} * \mathrm{y}) = \mathcal{F}(\mathrm{x})\,\mathcal{F}(\mathrm{y}) = (\ldots, \mathrm{X}_\chi \mathrm{Y}_\chi, \ldots)$ (pontonkénti szorzás).

A konvolúció tulajdonságai

- Mindkét változóban lineáris $\mathbb{C}$ fölött, kommutatív, asszociatív.
- Van egységelem: $x_1 = 1$ és $x_g = 0$ $(g \neq 1)$ megfelelő.
- Legyen T_h a $h \in G$-vel való jobbszorzás a csoportalgebrán, ez h-val való eltolás.

Konvolúció

Legyen $\mathrm{x} = (\dots, x_g, \dots)$ és $\mathrm{y} = (\dots, y_g, \dots)$, továbbá $(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $\mathrm{z} = (\dots, z_g, \dots)$ neve az x és y **konvolúciója**, jele $\mathrm{x} * \mathrm{y}$.
Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője.
A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát
$\mathcal{F}(\mathrm{x} * \mathrm{y}) = \mathcal{F}(\mathrm{x})\,\mathcal{F}(\mathrm{y}) = (\dots, \mathrm{X}_\chi \mathrm{Y}_\chi, \dots)$ (pontonkénti szorzás).

A konvolúció tulajdonságai

- Mindkét változóban lineáris $\mathbb{C}$ fölött, kommutatív, asszociatív.
- Van egységelem: $x_1 = 1$ és $x_g = 0$ $(g \neq 1)$ megfelelő.
- Legyen T_h a $h \in G$-vel való jobbszorzás a csoportalgebrán, ez h-val való **eltolás**. Ekkor $T_h(\mathrm{x})(g) = \mathrm{x}(gh^{-1})$ (HF).

Konvolúció

Legyen $\mathrm{x} = (\ldots, x_g, \ldots)$ és $\mathrm{y} = (\ldots, y_g, \ldots)$, továbbá $(\sum_{g\in G} x_g g)(\sum_{g\in G} y_g g) = \sum_{g\in G} z_g g$, ekkor $z_g = \sum_{f\in G} x_{gf^{-1}} y_f$.
A $\mathrm{z} = (\ldots, z_g, \ldots)$ neve az x és y **konvolúciója**, jele $\mathrm{x} * \mathrm{y}$.
Vagyis a konvolúció a csoportalgebra szorzásának megfelelője.
A gyűrűhomomorfizmus-tulajdonság miatt tehát
$\mathcal{F}(\mathrm{x} * \mathrm{y}) = \mathcal{F}(\mathrm{x})\,\mathcal{F}(\mathrm{y}) = (\ldots, \mathrm{X}_\chi \mathrm{Y}_\chi, \ldots)$ (pontonkénti szorzás).

A konvolúció tulajdonságai

- Mindkét változóban lineáris $\mathbb{C}$ fölött, kommutatív, asszociatív.
- Van egységelem: $x_1 = 1$ és $x_g = 0$ $(g \neq 1)$ megfelelő.
- Legyen T_h a $h \in G$-vel való jobbszorzás a csoportalgebrán, ez h-val való **eltolás**. Ekkor $T_h(\mathrm{x})(g) = \mathrm{x}(gh^{-1})$ (HF). Konvolúció eltoltja: $T_h(\mathrm{x} * \mathrm{y}) = T_h(\mathrm{x}) * \mathrm{y} = \mathrm{x} * T_h(\mathrm{y})$.

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g \in G} x_g g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$.

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(x) = X$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(x) = X$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$,

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g \in G} x_g g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g \in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g \in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ konjugáltja legyen $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g \in G} x_g g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g \in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi \in \widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g \in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g \in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ konjugáltja legyen $\sum_{g \in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$-nek,

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ konjugáltja legyen $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$-nek, minden $g \in G$ konjugáltja önmaga.)

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ konjugáltja legyen $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$-nek, minden $g \in G$ konjugáltja önmaga.)
Mivel $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ (pontonkénti inverz)

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ konjugáltja legyen $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$-nek, minden $g \in G$ konjugáltja önmaga.) Mivel $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ (pontonkénti inverz) ezért $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G} \chi(g) g$ konjugáltja $b_{\chi^{-1}}$.

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\dots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \dots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\dots, \overline{x_{g^{-1}}}, \dots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ konjugáltja legyen $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$-nek, minden $g \in G$ konjugáltja önmaga.) Mivel $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ (pontonkénti inverz) ezért $b_\chi = (1/n) \sum_{g\in G} \chi(g) g$ konjugáltja $b_{\chi^{-1}}$. Így $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_{\chi^{-1}} = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$.

Konjugált transzformáltja

Tétel

Legyen $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$, azaz $\sum_{g\in G} x_g g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} X_\chi b_\chi \in \mathbb{C}[G]$. Ekkor $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$ és $\sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_\chi = \sum_{g\in G} \overline{x_{g^{-1}}} g$, azaz $\mathcal{F}(\overline{\mathrm{x}}) = (\ldots, \overline{X_{\chi^{-1}}}, \ldots)$ és $\mathcal{F}^{-1}(\overline{\mathrm{X}}) = (\ldots, \overline{x_{g^{-1}}}, \ldots)$.

Bizonyítás

$\sum_{g\in G} x_g g \in \mathbb{C}[G]$ konjugáltja legyen $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g \in \mathbb{C}[G]$ (ez automorfizmusa $\mathbb{C}[G]$-nek, minden $g \in G$ konjugáltja önmaga.) Mivel $\chi^{-1}(g) = \chi(g)^{-1} = \overline{\chi(g)} = \chi(g^{-1})$ (pontonkénti inverz) ezért $b_\chi = (1/n)\sum_{g\in G} \chi(g) g$ konjugáltja $b_{\chi^{-1}}$. Így $\sum_{g\in G} \overline{x_g} g = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_\chi} b_{\chi^{-1}} = \sum_{\chi\in\widehat{G}} \overline{X_{\chi^{-1}}} b_\chi$.
Az inverz transzformációt az $x_g = (1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g) X_\chi$ képlettel számítva $(1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g)\overline{X_\chi} = \overline{(1/n)\sum_{\chi\in G} \chi(g^{-1}) X_\chi} = \overline{x_{g^{-1}}}$. □

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$,

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$,

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$.

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x + p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \le j < n$.

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \leq j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \leq m < n$ egészek.

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \leq j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \leq m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \le j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \le m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj} \varepsilon^{mj}$.

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \dots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \le j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \le m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj}\varepsilon^{mj}$.
De $\varepsilon^{(m-k)j} = \chi_{m-k}(j)$,

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \le j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \le m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj}\varepsilon^{mj}$.
De $\varepsilon^{(m-k)j} = \chi_{m-k}(j)$, tehát az ortogonalitás miatt
$X_{\chi_k} = 0$ ha $n \nmid m-k$,

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \leq j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \leq m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj} \varepsilon^{mj}$.
De $\varepsilon^{(m-k)j} = \chi_{m-k}(j)$, tehát az ortogonalitás miatt
$X_{\chi_k} = 0$ ha $n \nmid m-k$, azaz ha $m \neq k$, hiszen $0 \leq k, m < n$.

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \le j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \le m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj}\varepsilon^{mj}$.
De $\varepsilon^{(m-k)j} = \chi_{m-k}(j)$, tehát az ortogonalitás miatt $X_{\chi_k} = 0$ ha $n \nmid m-k$, azaz ha $m \ne k$, hiszen $0 \le k, m < n$.
Ha $k = m$, akkor $X_{\chi_k} = n$ (az összeg minden tagja 1).

Periodikus jelek

A legfontosabb eset: $G = \mathbb{Z}_n^+$, és ha $\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, akkor $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, ahol $j, k \in \mathbb{Z}_n^+$, azaz $\widehat{G} = \{\chi_0, \ldots, \chi_{n-1}\}$. Nyilván $k \to \chi_k$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ periodikus függvény: $f(x+p) = f(x)$ $(x \in \mathbb{R})$. Mintavétel a pj/n helyeken: $x_j = f(pj/n)$, ahol $0 \leq j < n$.

Főpélda

Legyen $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$, $p = 2\pi$, $0 \leq m < n$ egészek.

Ekkor $x_j = \varepsilon^{mj}$ és $X_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{n-1} \overline{\chi_k(j)} x_j = \sum_{j=0}^{n-1} \varepsilon^{-kj}\varepsilon^{mj}$.
De $\varepsilon^{(m-k)j} = \chi_{m-k}(j)$, tehát az ortogonalitás miatt
$X_{\chi_k} = 0$ ha $n \nmid m-k$, azaz ha $m \neq k$, hiszen $0 \leq k, m < n$.
Ha $k = m$, akkor $X_{\chi_k} = n$ (az összeg minden tagja 1).
HF: $\overline{f(x)}$ transzformáltja $X_{\chi_k} = n$ ha $k = n - m$ és 0 egyébként.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \le j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \dots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \dots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány,

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i \sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \le j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.
Mivel $g(x) = \sin(mx) = (f(x) - \overline{f(x)})/(2i)$,

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.
Mivel $g(x) = \sin(mx) = (f(x) - \overline{f(x)})/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \le j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \dots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$. $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki. Mivel $g(x) = \sin(mx) = (f(x) - \overline{f(x)})/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$;

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.
Mivel $g(x) = \sin(mx) = (f(x) - \overline{f(x)})/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$; egyébként $Y_{\chi_k} = 0$.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.
Mivel $g(x) = \sin(mx) = \left(f(x) - \overline{f(x)}\right)/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$; egyébként $Y_{\chi_k} = 0$.

A $-\sin\left((n-m)x\right)$ függvény ugyanazt a mintát adja, mint $\sin(mx)$.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \le j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$. $f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki. Mivel $g(x) = \sin(mx) = (f(x) - \overline{f(x)})/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$; egyébként $Y_{\chi_k} = 0$.

A $-\sin((n-m)x)$ függvény ugyanazt a mintát adja, mint $\sin(mx)$. Ha előre tudjuk, hogy $n > 2m$ is teljesül, akkor m és $n - m$ közül már ki tudjuk választani a megfelelőt,

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \dots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.
Mivel $g(x) = \sin(mx) = \left(f(x) - \overline{f(x)}\right)/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$; egyébként $Y_{\chi_k} = 0$.

A $-\sin\left((n-m)x\right)$ függvény ugyanazt a mintát adja, mint $\sin(mx)$.
Ha előre tudjuk, hogy $n > 2m$ is teljesül, akkor m és $n - m$ közül már ki tudjuk választani a megfelelőt, mert $n - m > n/2$.

A frekvencia rekonstrukciója

Legyen $g(x) = \sin(mx)$ és $y_j = g(2\pi j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Mikor lehet az $(y_0, \ldots, y_{n-1})$ mintából m értékét viszakapni?
(y az időtartomány, transzformáltja a frekvenciatartomány.)

Ha $m = n/2$ vagy 0, akkor y_j azonosan nulla, így a rekonstrukció nem lehetséges. Tegyük föl, hogy $0 < n < m$ és $m \neq n/2$.
$f(x) = \cos(mx) + i\sin(mx)$ transzformáltját most számítottuk ki.
Mivel $g(x) = \sin(mx) = \left(f(x) - \overline{f(x)}\right)/(2i)$, ezért a linearitást és a konjugáltra vonatkozó képletet felhasználva

$Y_{\chi_k} = n/2i$ ha $k = m$ és $-n/2i$ ha $k = n - m$; egyébként $Y_{\chi_k} = 0$.

A $-\sin\left((n-m)x\right)$ függvény ugyanazt a mintát adja, mint $\sin(mx)$.
Ha előre tudjuk, hogy $n > 2m$ is teljesül, akkor m és $n - m$ közül már ki tudjuk választani a megfelelőt, mert $n - m > n/2$.
Vagyis elég sűrű mintavételezéssel kell dolgozni.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \le j < n$.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$,

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$, továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$, továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető,

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$,
továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető, ami $\sin(m \cdot 2\pi t)$ és $\cos(m \cdot 2\pi t)$ alakú függvények (végtelen) lineáris kombinációja.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$,
továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető, ami $\sin(m \cdot 2\pi t)$ és $\cos(m \cdot 2\pi t)$ alakú függvények (végtelen) lineáris kombinációja. Ha mindegyik $m \leq 880$ (és így az összeg véges),

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$, továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető, ami $\sin(m \cdot 2\pi t)$ és $\cos(m \cdot 2\pi t)$ alakú függvények (végtelen) lineáris kombinációja. Ha mindegyik $m \leq 880$ (és így az összeg véges), akkor a Fourier-transzformáltban csak χ_m és χ_{n-m} szerepelhet.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$, továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető, ami $\sin(m \cdot 2\pi t)$ és $\cos(m \cdot 2\pi t)$ alakú függvények (végtelen) lineáris kombinációja. Ha mindegyik $m \leq 880$ (és így az összeg véges), akkor a Fourier-transzformáltban csak χ_m és χ_{n-m} szerepelhet. De $n - m > 880$, ezért a szereplő frekvenciák értéke és amplitúdója rekonstruálható.

Hangpélda

Van két hangszer. Az egyik normál A-n szól: 440 Hz.
A másik fele hangerővel az oktávján: 880 Hz (felhangok nincsenek).
A kettő hangja együtt: $f(t) = 2\sin(440 \cdot 2\pi t) + \sin(880 \cdot 2\pi t)$.

Tegyük fel, hogy $n > 2 * 880$. Minta: $x_j = f(j/n)$, ahol $0 \leq j < n$.
Ekkor $X_{\chi_k} = 0$, kivéve $X_{\chi_{440}} = 2n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-440}} = -2n/(2i)$, továbbá $X_{\chi_{880}} = n/(2i)$ és $X_{\chi_{n-880}} = -n/(2i)$.

Analízis: Minden szakaszonként folytonos, 2π szerint periodikus függvény Fourier-sorba fejthető, ami $\sin(m \cdot 2\pi t)$ és $\cos(m \cdot 2\pi t)$ alakú függvények (végtelen) lineáris kombinációja. Ha mindegyik $m \leq 880$ (és így az összeg véges), akkor a Fourier-transzformáltban csak χ_m és χ_{n-m} szerepelhet. De $n - m > 880$, ezért a szereplő frekvenciák értéke és amplitúdója rekonstruálható.
Shannon-Nyquist tétele: A jelben előforduló maximális frekvencia több, mint duplájával elég mintavételezni.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik,

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel alias-ának nevezzük.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel alias-ának nevezzük.

Védekezés: Anti-aliasing szűrő.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel alias-ának nevezzük.

Védekezés: Anti-aliasing szűrő. A mintavételezés (digitalizálás) előtt használunk egy analóg, alul-áteresztő szűrőt,

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel alias-ának nevezzük.

Védekezés: Anti-aliasing szűrő. A mintavételezés (digitalizálás) előtt használunk egy analóg, alul-áteresztő szűrőt,
ami a jelből levágja a kívánt mintavételezési frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú jeleket.

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel alias-ának nevezzük.

Védekezés: Anti-aliasing szűrő. A mintavételezés (digitalizálás) előtt használunk egy analóg, alul-áteresztő szűrőt,
ami a jelből levágja a kívánt mintavételezési frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú jeleket. (A CD esetében a mintavételezési frekvencia 44.1 kHz,

Aliasing

Legyen $f(x) = \sin(440 \cdot 2\pi t)$ és $n = 660$. A transzformáltban ekkor megjelenik a $660 - 440 = 220$ Hz-es frekvencia is. Miért baj ez?

A minták: $x_j = \sin(440 \cdot 2\pi j/660)$. Ezek ráillenek a $-\sin(220 \cdot 2\pi t)$ függvényre is, hiszen $\sin(2\pi j - \alpha) = -\sin(\alpha)$.
A digitális-analóg konverterek hajlamosak a legalacsonyabb frekvenciájú függvényt interpolálni, ami az adott mintákra illeszkedik, ezért a hangszóróban 220 Hz-es hangot fogunk hallani.

A 220 Hz-es jelet az eredeti jel alias-ának nevezzük.

Védekezés: Anti-aliasing szűrő. A mintavételezés (digitalizálás) előtt használunk egy analóg, alul-áteresztő szűrőt,
ami a jelből levágja a kívánt mintavételezési frekvencia felénél nagyobb frekvenciájú jeleket. (A CD esetében a mintavételezési frekvencia 44.1 kHz, mert az emberi hallás felső határa 20 kHz.)

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban $(0 \leq j < n,\ 0 \leq k < m)$.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban ($0 \le j < n$, $0 \le k < m$).

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban $(0 \leq j < n,\ 0 \leq k < m)$.

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) : p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$,

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0,a] \times [0,b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban $(0 \le j < n,\ 0 \le k < m)$.

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) \,:\, p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ $(\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m))$.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban $(0 \leq j < n,\ 0 \leq k < m)$.

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) \,:\, p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ $(\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m))$.
Nyilván $(p, q) \to (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban $(0 \leq j < n,\ 0 \leq k < m)$.

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) \,:\, p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ $(\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m))$.
Nyilván $(p, q) \to (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $x_{j,k} = f(aj/n, bk/m)$, írjunk (χ_p, ψ_q) helyett (p, q)-t.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban ($0 \le j < n$, $0 \le k < m$).

A **2D diszkrét Fourier-transzformáció** csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) \,:\, p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ ($\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m)$).
Nyilván $(p, q) \to (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $x_{j,k} = f(aj/n, bk/m)$, írjunk (χ_p, ψ_q) helyett (p, q)-t.
Ekkor a transzformált $X_{p,q} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^{-jp} \eta^{-kq} x_{j,k}$,

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban ($0 \leq j < n$, $0 \leq k < m$).

A **2D diszkrét Fourier-transzformáció** csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) : p \in \mathbb{Z}_n^+, q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ ($\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m)$).
Nyilván $(p, q) \to (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $x_{j,k} = f(aj/n, bk/m)$, írjunk (χ_p, ψ_q) helyett (p, q)-t.
Ekkor a transzformált $X_{p,q} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^{-jp}\eta^{-kq}x_{j,k}$,
mert $\overline{\chi_p(j)} = \varepsilon^{-jp}$ és $\overline{\chi_q(k)} = \eta^{-kq}$.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban $(0 \leq j < n,\ 0 \leq k < m)$.

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) : p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ $(\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m))$.
Nyilván $(p, q) \to (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $x_{j,k} = f(aj/n, bk/m)$, írjunk (χ_p, ψ_q) helyett (p, q)-t.
Ekkor a transzformált $X_{p,q} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^{-jp}\eta^{-kq} x_{j,k}$,
mert $\overline{\chi_p(j)} = \varepsilon^{-jp}$ és $\overline{\chi_q(k)} = \eta^{-kq}$. Exponenciális jelöléssel:
ha $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, akkor $\varepsilon^{-jp}\eta^{-kq} = e^{-2\pi i[(jp/n)+(kq/m)]}$.

2D diszkrét Fourier-transzformáció

Képfeldolgozás

Most f egy téglalapon definiált valós függvény.
Legyen a téglalap a $[0, a] \times [0, b]$ Descartes-szorzat.
Mintavétel az $(aj/n, bk/m)$ pontokban ($0 \le j < n$, $0 \le k < m$).

A 2D diszkrét Fourier-transzformáció csoportja $G = \mathbb{Z}_n^+ \times \mathbb{Z}_m^+$. Így $\widehat{G} = \{(\chi_p, \psi_q)) : p \in \mathbb{Z}_n^+,\ q \in \mathbb{Z}_m^+\}$, ahol $\chi_p(j) = \varepsilon^{jp}$, $\psi_q(k) = \eta^{kq}$ ($\varepsilon = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ és $\eta = \cos(2\pi/m) + i\sin(2\pi/m)$).
Nyilván $(p, q) \to (\chi_p, \psi_q)$ izomorfizmus G és $\widehat{G}$ között.

Legyen $x_{j,k} = f(aj/n, bk/m)$, írjunk (χ_p, ψ_q) helyett (p, q)-t.
Ekkor a transzformált $X_{p,q} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{m-1} \varepsilon^{-jp}\eta^{-kq}x_{j,k}$,
mert $\overline{\chi_p(j)} = \varepsilon^{-jp}$ és $\overline{\chi_q(k)} = \eta^{-kq}$. Exponenciális jelöléssel:
ha $e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha$, akkor $\varepsilon^{-jp}\eta^{-kq} = e^{-2\pi i[(jp/n)+(kq/m)]}$.
Inverz: $x_{j,k} = (1/(mn)) \sum_{p=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{m-1} e^{2\pi i[(jp/n)+(kq/m)]}X_{p,q}$.

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen x transzformáltja X (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk),

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen x transzformáltja X (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként.

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen x transzformáltja X (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként.
Az XY (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt.

Szűrők

Legyen $\mathbf{x}$ egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen $\mathbf{x}$ transzformáltja $\mathbf{X}$ (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként.
Az $\mathbf{XY}$ (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt. A kapott $\mathbf{z}$ minta megfelelő lesz.

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen x transzformáltja X (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként.
Az XY (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt. A kapott z minta megfelelő lesz.

Alternatíva

A keresett z megkapható, mint $x * y$ (konvolúció),
ahol y az Y inverz Fourier-transzformáltja.

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen x transzformáltja X (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként.
Az XY (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt. A kapott z minta megfelelő lesz.

Alternatíva

A keresett z megkapható, mint $x * y$ (konvolúció),
ahol y az Y inverz Fourier-transzformáltja.

Kompromisszumot kell kötni a számítási igény miatt.

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen x transzformáltja X (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként. Az XY (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt. A kapott z minta megfelelő lesz.

Alternatíva

A keresett z megkapható, mint $x * y$ (konvolúció), ahol y az Y inverz Fourier-transzformáltja.

Kompromisszumot kell kötni a számítási igény miatt. Például kinullázni y kis abszolút értékű komponenseit,

Szűrők

Legyen x egy minta, le akarjuk vágni az f frekvencia fölötti komponenseket (aluláteresztő szűrő, low pass filter).

Legyen x transzformáltja X (mostantól X_{χ_k} helyett X_k-t írunk), továbbá $Y_k = 0$ ha $k > f$ és $Y_k = 0$ egyébként.
Az XY (pontonkénti szorzás) sorozatra alkalmazzunk inverz Fourier-transzformációt. A kapott z minta megfelelő lesz.

Alternatíva

A keresett z megkapható, mint $\mathrm{x} * \mathrm{y}$ (konvolúció), ahol y az Y inverz Fourier-transzformáltja.

Kompromisszumot kell kötni a számítási igény miatt.
Például kinullázni y kis abszolút értékű komponenseit, vagy kevésbé agresszív vágást alkalmazni Y definíciójában.

Eredeti kép

Ezen a képen fogjuk bemutatni a zajcsökkentési algoritmusokat.

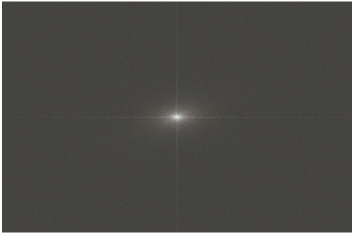
Zajos kép

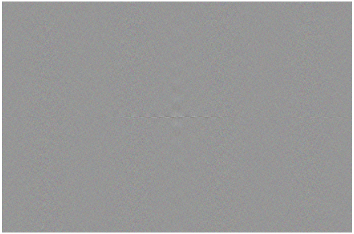
A képhez normális eloszlású (Gaussian) zajt adtunk hozzá.

Zajos kép

A képhez normális eloszlású (Gaussian) zajt adtunk hozzá.
Ezt próbáljuk majd eltávolítani különféle módszerekkel.

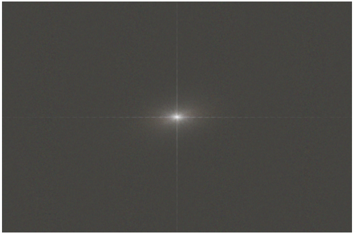
A zajos kép Fourier-transzformáltja

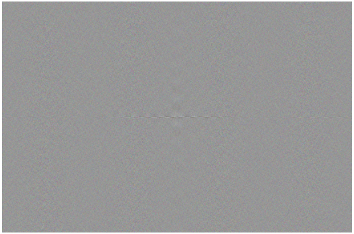




Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk.

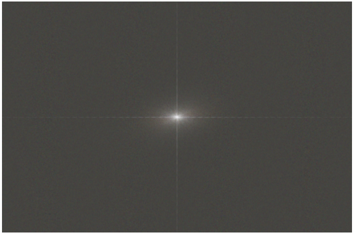
A zajos kép Fourier-transzformáltja

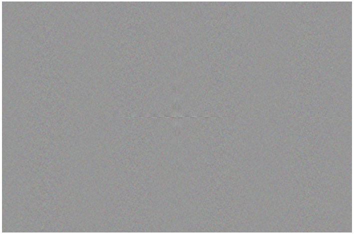




Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk.
A jobb oldali kép pontjai a megfelelő szám szögét (fázisát),

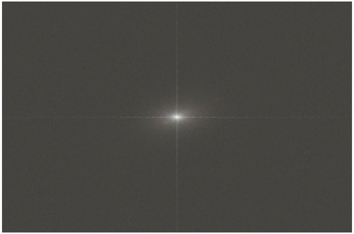
A zajos kép Fourier-transzformáltja

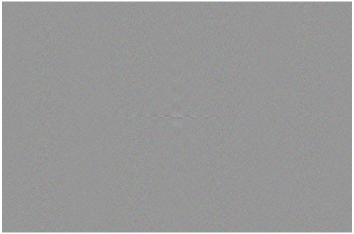




Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk.
A jobb oldali kép pontjai a megfelelő szám szögét (fázisát),
a másik kép pontjai az abszolút értékét (amplitúdóját) ábrázolják.

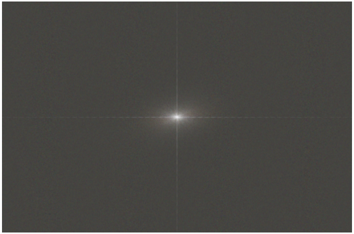
A zajos kép Fourier-transzformáltja

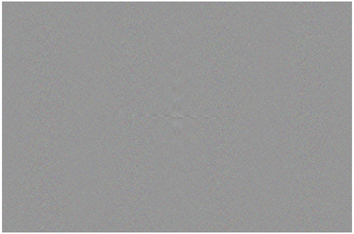




Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk.
A jobb oldali kép pontjai a megfelelő szám szögét (fázisát),
a másik kép pontjai az abszolút értékét (amplitúdóját) ábrázolják.
Utóbbiak fel vannak skálázva, mert az értékek olyan kicsik,
hogy szinte az egész kép fekete lenne (fekete $= 0$, fehér $= 1$).

A zajos kép Fourier-transzformáltja

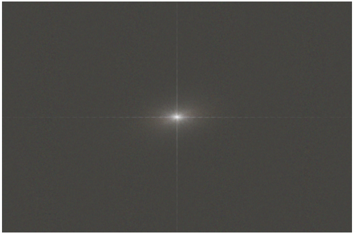


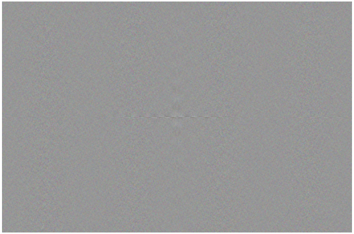


Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk.
A jobb oldali kép pontjai a megfelelő szám szögét (fázisát),
a másik kép pontjai az abszolút értékét (amplitúdóját) ábrázolják.
Utóbbiak fel vannak skálázva, mert az értékek olyan kicsik,
hogy szinte az egész kép fekete lenne (fekete $= 0$, fehér $= 1$).

Az elrendezés olyan, hogy minél távolabb vagyunk a középponttól,
annál nagyobb frekvenciákhoz tartozó értékeket látunk.

A zajos kép Fourier-transzformáltja

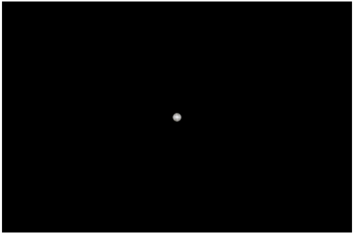




Mivel a transzformált komplex értékű, két képet látunk.
A jobb oldali kép pontjai a megfelelő szám szögét (fázisát),
a másik kép pontjai az abszolút értékét (amplitúdóját) ábrázolják.
Utóbbiak fel vannak skálázva, mert az értékek olyan kicsik,
hogy szinte az egész kép fekete lenne (fekete $= 0$, fehér $= 1$).

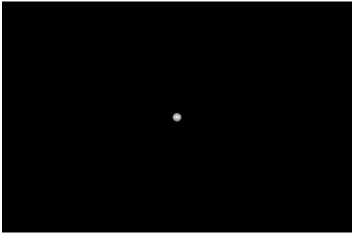
Az elrendezés olyan, hogy minél távolabb vagyunk a középponttól, annál nagyobb frekvenciákhoz tartozó értékeket látunk. Középen fényesebb a kép, így a kis frekvenciák értékei a nagyobbak.

A nagy frekvenciák levágása



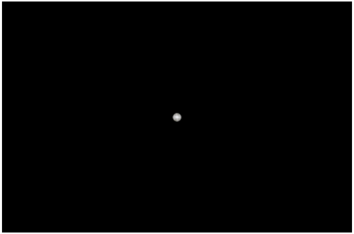
A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk.

A nagy frekvenciák levágása



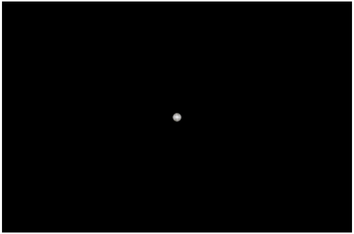
A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép életlenné vált,

A nagy frekvenciák levágása



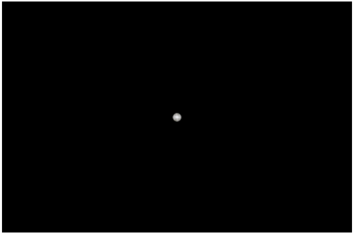
A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép életlenné vált, és az élekkel párhuzamos vonalak jelentek meg.

A nagy frekvenciák levágása



A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép életlenné vált, és az élekkel párhuzamos vonalak jelentek meg. Utóbbi az úgynevezett Gibbs-jelenség. Oka a következő.

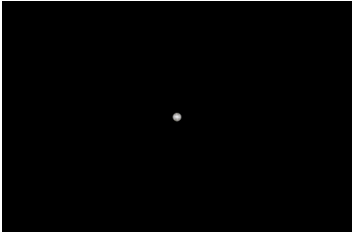
A nagy frekvenciák levágása



A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép életlenné vált, és az élekkel párhuzamos vonalak jelentek meg. Utóbbi az úgynevezett Gibbs-jelenség. Oka a következő.

A transzformáltat egy olyan függvénnyel szoroztuk, amely a középső körön belül 1, másutt nulla.

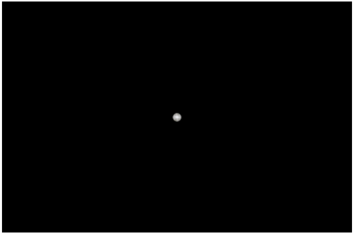
A nagy frekvenciák levágása



A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép életlenné vált, és az élekkel párhuzamos vonalak jelentek meg. Utóbbi az úgynevezett Gibbs-jelenség. Oka a következő.

A transzformáltat egy olyan függvénnyel szoroztuk, amely a középső körön belül 1, másutt nulla. Ha ezt visszatranszformáljuk, akkor nagy amplitúdójú rezgések szerepelnek benne,

A nagy frekvenciák levágása



A bal oldali képen kinulláztuk a nagyobb frekvenciához tartozó értékeket, majd visszatranszformáltunk. A zaj eltűnt, de a kép életlenné vált, és az élekkel párhuzamos vonalak jelentek meg. Utóbbi az úgynevezett Gibbs-jelenség. Oka a következő.

A transzformáltat egy olyan függvénnyel szoroztuk, amely a középső körön belül 1, másutt nulla. Ha ezt visszatranszformáljuk, akkor nagy amplitúdójú rezgések szerepelnek benne, és ezzel a függvénnyel kell konvolúciót képezni.

Óvatosabb vágás

Itt nagyobb átmérőjű körrel vágtuk le az amplitúdókat ábrázoló képet.

Óvatosabb vágás

Itt nagyobb átmérőjű körrel vágtuk le az amplitúdókat ábrázoló képet. Még jobb eredményt kaphatunk kevésbé durva átmenettel.

Gaussian blur

A művelet egy kétdimenziós Gauss-görbével való konvolúció.

Gaussian blur

A művelet egy kétdimenziós Gauss-görbével való konvolúció.
A Gibbs-féle vonalak eltűntek, de a kép még mindig lágy.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk. Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk.
Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani.
Minden réteg egyre nagyobb léptékű alakzatokat választ ki.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk.
Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani.
Minden réteg egyre nagyobb léptékű alakzatokat választ ki.
Mivel a zaj tipikusan kis léptékű, lehetséges a zajcsökkentés úgy, hogy a kis léptékű rétegekben agresszívabban filterezünk.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk.
Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani.
Minden réteg egyre nagyobb léptékű alakzatokat választ ki.
Mivel a zaj tipikusan kis léptékű, lehetséges a zajcsökkentés úgy, hogy a kis léptékű rétegekben agresszívabban filterezünk.
Minden egyes rétegben meg is vizsgálhatjuk a zaj mértékét.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk.
Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani.
Minden réteg egyre nagyobb léptékű alakzatokat választ ki.
Mivel a zaj tipikusan kis léptékű, lehetséges a zajcsökkentés úgy, hogy a kis léptékű rétegekben agresszívabban filterezünk.
Minden egyes rétegben meg is vizsgálhatjuk a zaj mértékét.
Ehhez a valószínűségszámításban tanult szórást kell kiszámítani.

Wavelet-felbontás

Most ügyesebb bázist választunk, mint amit eddig használtunk.
Ennek segítségével a képet rétegekre tudjuk bontani.
Minden réteg egyre nagyobb léptékű alakzatokat választ ki.
Mivel a zaj tipikusan kis léptékű, lehetséges a zajcsökkentés úgy, hogy a kis léptékű rétegekben agresszívabban filterezünk.
Minden egyes rétegben meg is vizsgálhatjuk a zaj mértékét.
Ehhez a valószínűségszámításban tanult szórást kell kiszámítani.

Itt az első két réteg látható ...

Wavelet-felbontás

... itt pedig a következő három, majd a kép megmaradó része.

Wavelet-felbontás

… itt pedig a következő három, majd a kép megmaradó része.
A kép „élességét” adó információt a kis léptékű rétegek hordozzák.

Multiscale Linear Transform

Az imént leírt algoritmust használtuk 5 réteg segítségével.

Multiscale Linear Transform

Az imént leírt algoritmust használtuk 5 réteg segítségével.
Két részletet érdemes kinagyítani.

A részletek élessége

Bal oldal: Gaussian Blur. Jobb oldal: MLT.

A részletek élessége

Bal oldal: Gaussian Blur. Jobb oldal: MLT.

A MLT több részletet meghagy, és ugyanannyira zavaró a zaj.

Total Gradient Variation Denoising

Ez egy másik algoritmus eredménye, agresszív paraméterekkel.
www.lightvortexastronomy.com/tutorial-noise-reduction.html

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk;

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat;

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk.

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (kvantálás).

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (kvantálás).
(A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (kvantálás).
(A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

Probléma: a Gibbs-jelenség.

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (kvantálás).
(A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

Probléma: a Gibbs-jelenség. Nem folytonos (szakadó) függvény transzformáltja nem ad „szép” eredményt.

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (kvantálás).
(A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

Probléma: a Gibbs-jelenség. Nem folytonos (szakadó) függvény transzformáltja nem ad „szép" eredményt.

A képet 8×8-as blokkokra vágjuk, ezeken belül már „sima".

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (kvantálás).
(A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

Probléma: a Gibbs-jelenség. Nem folytonos (szakadó) függvény transzformáltja nem ad „szép” eredményt.

A képet 8×8-as blokkokra vágjuk, ezeken belül már „sima”.
Mivel $\mathbb{Z}_n^+$-ban mod n számolunk, az is „szakadás”,
ha a blokk két szemközti szélén nagy a kontraszt eltérése.

JPEG tömörítés

A tömörítés elve

A jelet Fouier-transzformáljuk; kinullázzuk a kis abszolút értékű számokat; visszatranszformálunk. Általánosabban:
az értékkészletet intervallumokra osztjuk, és az egy intervallumba eső értékek helyébe ugyanazt a számot írjuk (kvantálás).
(A JPEG2000 szabvány ehelyett már wavelet felbontást használ.)

Probléma: a Gibbs-jelenség. Nem folytonos (szakadó) függvény transzformáltja nem ad „szép” eredményt.

A képet 8×8-as blokkokra vágjuk, ezeken belül már „sima”.
Mivel $\mathbb{Z}_n^+$-ban mod n számolunk, az is „szakadás”,
ha a blokk két szemközti szélén nagy a kontraszt eltérése.

Megoldás: Diszkrét Fourier-transzformáció helyett
diszkrét koszinusz transzformáció.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük. Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük. Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.
Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra:

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.
Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben. A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$. Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük. Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$. Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re. Ha $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = \mathrm{Z}$, akkor $\overline{\mathrm{Z}}$ inverz transzformáltja $(\ldots, \overline{z_{g-1}}, \ldots)$.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük. Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re.
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = \mathrm{Z}$, akkor $\overline{\mathrm{Z}}$ inverz transzformáltja $(\ldots, \overline{z_{g-1}}, \ldots)$.
Mivel z_j valós, ezért $\overline{z_{g-1}} = z_g$ a fenti szimmetria miatt.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.
Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re.
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = \mathrm{Z}$, akkor $\overline{\mathrm{Z}}$ inverz transzformáltja $(\ldots, \overline{z_{g-1}}, \ldots)$.
Mivel z_j valós, ezért $\overline{z_{g-1}} = z_g$ a fenti szimmetria miatt.
Vagyis $\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{Z}$,

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást" a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.
Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re.
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = \mathrm{Z}$, akkor $\overline{\mathrm{Z}}$ inverz transzformáltja $(\ldots, \overline{z_{g-1}}, \ldots)$.
Mivel z_j valós, ezért $\overline{z_{g-1}} = z_g$ a fenti szimmetria miatt.
Vagyis $\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{Z}$, más szóval a transzformált is valós számsorozat.

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.
Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re.
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = \mathrm{Z}$, akkor $\overline{\mathrm{Z}}$ inverz transzformáltja $(\ldots, \overline{z_{g-1}}, \ldots)$.
Mivel z_j valós, ezért $\overline{z_{g-1}} = z_g$ a fenti szimmetria miatt.
Vagyis $\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{Z}$, más szóval a transzformált is valós számsorozat.

Most $G = \mathbb{Z}_{4n}^+$;

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.
Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re.
Ha $\mathcal{F}(z) = Z$, akkor $\overline{Z}$ inverz transzformáltja $(\dots, \overline{z_{g-1}}, \dots)$.
Mivel z_j valós, ezért $\overline{z_{g-1}} = z_g$ a fenti szimmetria miatt.
Vagyis $\overline{Z} = Z$, más szóval a transzformált is valós számsorozat.

Most $G = \mathbb{Z}_{4n}^+$; ha $\varepsilon = e^{2\pi i/(4n)}$ és $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, akkor $z_k = z_{4n-k}$ miatt

Diszkrét koszinusz transzformáció

Az x jel mögé írjuk ugyanazokat a számokat fordított sorrendben.
A kapott y már szimmetrikus: $y_i = y_{2n-1-i}$.
Ez megszünteti a „szakadást” a szélek között (edge discontinuity).

Ezt a transzformációt technikailag a következőképpen kezeljük.
Írjunk nullákat a jelek közé, nullával kezdve, így egy $4n$ hosszú z sorozatot kapunk. Példa: $abc \to abccba \to 0a0b0c0b0n0a$.
Ez a sorozat már szimmetrikus a 0-ra: $z_j = z_{4N-j}$ minden j-re.
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{z}) = \mathrm{Z}$, akkor $\overline{\mathrm{Z}}$ inverz transzformáltja $(\ldots, \overline{z_{g-1}}, \ldots)$.
Mivel z_j valós, ezért $\overline{z_{g-1}} = z_g$ a fenti szimmetria miatt.
Vagyis $\overline{\mathrm{Z}} = \mathrm{Z}$, más szóval a transzformált is valós számsorozat.

Most $G = \mathbb{Z}_{4n}^+$; ha $\varepsilon = e^{2\pi i/(4n)}$ és $\chi_k(j) = \varepsilon^{jk}$, akkor $z_k = z_{4n-k}$ miatt $Z_{\chi_k} = \sum_{j=0}^{4n-1} \overline{\chi_k(j)} z_j = 2\sum_{j=0}^{2n-1} z_j \cos\left(2\pi jk/(4n)\right) =$
$= 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t:

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$,

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathrm{x} \to \mathrm{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a diszkrét koszinusz transzformáció (DCT).

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathrm{x} \to \mathrm{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a diszkrét koszinusz transzformáció (DCT). Inverze
$x_j = (1/n)\left[Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)\right]$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m + (1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha + \pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \dots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathrm{x} \to \mathrm{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a
diszkrét koszinusz transzformáció (DCT). Inverze
$x_j = (1/n)\left[Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos\left(\pi k(j + (1/2))/n\right)\right]$.

Bizonyítás: $x_j = z_{2j+1}$ kiszámításához a $z_g = (1/n)\sum_{\chi \in G} \chi(g) Z_\chi$
képletet használjuk:

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathrm{x} \to \mathrm{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a diszkrét koszinusz transzformáció (DCT). Inverze
$x_j = (1/n)\left[Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)\right]$.

Bizonyítás: $x_j = z_{2j+1}$ kiszámításához a $z_g = (1/n)\sum_{\chi\in G}\chi(g)Z_\chi$ képletet használjuk: $z_m = (1/(4n))\sum_{k=0}^{4n-1}\varepsilon^{mk}Z_k$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathrm{x} \to \mathrm{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a diszkrét koszinusz transzformáció (DCT). Inverze
$x_j = (1/n)\left[Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)\right]$.

Bizonyítás: $x_j = z_{2j+1}$ kiszámításához a $z_g = (1/n)\sum_{\chi\in G}\chi(g)Z_\chi$ képletet használjuk: $z_m = (1/(4n))\sum_{k=0}^{4n-1}\varepsilon^{mk}Z_k$. Ha $1 \le k < n$, akkor Z_k együtthatója $\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{m(4n-k)} - \varepsilon^{m(k+2n)} - \varepsilon^{m(4n-(k+2n))} =$
$= \varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk} - \varepsilon^{2nm}(\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk}) = 4\cos\left(\pi mk/(2n)\right)$ páratlan m-re,

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathrm{x} \to \mathrm{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a diszkrét koszinusz transzformáció (DCT). Inverze
$x_j = (1/n)\left[Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)\right]$.

Bizonyítás: $x_j = z_{2j+1}$ kiszámításához a $z_g = (1/n)\sum_{\chi\in G}\chi(g)Z_\chi$ képletet használjuk: $z_m = (1/(4n))\sum_{k=0}^{4n-1}\varepsilon^{mk}Z_k$. Ha $1 \le k < n$, akkor Z_k együtthatója $\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{m(4n-k)} - \varepsilon^{m(k+2n)} - \varepsilon^{m(4n-(k+2n))} =$
$= \varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk} - \varepsilon^{2nm}(\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk}) = 4\cos\left(\pi mk/(2n)\right)$ páratlan m-re, mert $\varepsilon^{2n} = -1$.

A DCT inverze

Írjunk χ_k helyett k-t: $Z_k = 2\sum_{m=0}^{n-1} x_m \cos\left(\pi k(m+(1/2))/n\right)$.
Mivel $\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$, ezért $Z_{k+2n} = -Z_k$.
Közvetlen számolással (vagy mert x_k valós): $Z_{4n-k} = Z_k$.
Ezért $Z_{4n-n} = Z_n = -Z_{n+2n}$, ahonnan $Z_n = Z_{3n} = 0$.
Így $\mathrm{Z} = (Z_0, \ldots, Z_{n-1})$ meghatározza a többi Z_k-t.
Példa: $a, b, c, 0, -c, -b, -a, -b, -c, 0, c, b$ (ha $n = 3$).

Az $\mathrm{x} \to \mathrm{Z}$ lineáris transzformáció $\mathbb{R}^n$-ből $\mathbb{R}^n$-be a diszkrét koszinusz transzformáció (DCT). Inverze
$x_j = (1/n)\left[Z_0/2 + \sum_{k=1}^{n-1} Z_k \cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)\right]$.

Bizonyítás: $x_j = z_{2j+1}$ kiszámításához a $z_g = (1/n)\sum_{\chi\in G}\chi(g)Z_\chi$ képletet használjuk: $z_m = (1/(4n))\sum_{k=0}^{4n-1}\varepsilon^{mk}Z_k$. Ha $1 \le k < n$, akkor Z_k együtthatója $\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{m(4n-k)} - \varepsilon^{m(k+2n)} - \varepsilon^{m(4n-(k+2n))} =$
$= \varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk} - \varepsilon^{2nm}(\varepsilon^{mk} + \varepsilon^{-mk}) = 4\cos\left(\pi mk/(2n)\right)$ páratlan m-re, mert $\varepsilon^{2n} = -1$. A Z_0 együtthatója $\varepsilon^{m\cdot 0} - \varepsilon^{m\cdot 2n} = 2$. □

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk),

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció.

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)S\mathrm{Z}^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell,

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)S\mathrm{Z}^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del.

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)S\mathrm{Z}^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R.

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)S\mathrm{Z}^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R. Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni.

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk),
akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció.
Viszont $(1/n)SZ^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del.
Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R.
Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni.
Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$,

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)S\mathrm{Z}^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R. Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni. Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk),
akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció.
Viszont $(1/n)S\mathrm{Z}^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del.
Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R.
Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni.
Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A JPEG tömörítés lépései:

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)SZ^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R. Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni. Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A JPEG tömörítés lépései:

- DCT a 8×8-as blokkokon.

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)SZ^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R. Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni. Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A JPEG tömörítés lépései:

- DCT a 8×8-as blokkokon.
- Kvantálás (a tömörítés lényeges lépése).

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)SZ^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R. Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni. Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A JPEG tömörítés lépései:

- DCT a 8×8-as blokkokon.
- Kvantálás (a tömörítés lényeges lépése).
- Huffmann-kódolás (veszteségmentes tömörítés).

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)SZ^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R. Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni. Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A JPEG tömörítés lépései:

- DCT a 8×8-as blokkokon.
- Kvantálás (a tömörítés lényeges lépése).
- Huffmann-kódolás (veszteségmentes tömörítés).

Progresszív tömörítés: először csak az alacsonyabb frekvenciájú komponenseket küldjük el.

A DCT mint bázistranszformáció

Ha az S mátrix j-edik sorának k-adik eleme $\cos\left(\pi k(j+(1/2))/n\right)$ (a sorokat és oszlopokat 0-tól $n-1$-ig számozzuk), akkor $\mathrm{x}^T \to \mathrm{Z}^T = 2S^T\mathrm{x}^T$ a diszkrét koszinusz transzformáció. Viszont $(1/n)SZ^T$ nem teljesen x^T, mert a nulladik koordinátát mindig felezni kell, azaz S első oszlopát megszorozni $(1/2)$-del. Szorozzuk meg S első oszlopát $1/\sqrt{2}$-vel, az eredmény legyen R. Ekkor $2R^T\mathrm{x}^T$-ban Z_0 helyett $Z_0/\sqrt{2}$ fog állni. Ezért $(2/n)RR^T\mathrm{x}^T = \mathrm{x}^T$, azaz $\sqrt{2/n}R$ már ortogonális mátrix.

A JPEG tömörítés lépései:

- DCT a 8×8-as blokkokon.
- Kvantálás (a tömörítés lényeges lépése).
- Huffmann-kódolás (veszteségmentes tömörítés).

Progresszív tömörítés: először csak az alacsonyabb frekvenciájú komponenseket küldjük el. Az átjövő kép egyre élesebb lesz.

Redundáns koordinátázás

Ha $\mathrm{X}^T = S^* \mathrm{x}^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek.

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek.
Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis.

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek.
Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert keretnek (frame) nevezünk.

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert keretnek (frame) nevezünk.

Példa

Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon.

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert **keretnek** (frame) nevezünk.

Példa

Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor (x_1, x_2) transzformáltja $(1/2)(2x_1,\ -x_2 + \sqrt{3}x_2,\ -x_2 - \sqrt{3}x_2)$.

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert **keretnek** (frame) nevezünk.

Példa

Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor (x_1, x_2) transzformáltja $(1/2)(2x_1,\ -x_2 + \sqrt{3}x_2,\ -x_2 - \sqrt{3}x_2)$.

Előnyök

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert **keretnek** (frame) nevezünk.

Példa

Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor (x_1, x_2) transzformáltja $(1/2)(2x_1,\ -x_2 + \sqrt{3}x_2,\ -x_2 - \sqrt{3}x_2)$.

Előnyök

- Ez egyfajta hibajavító kódolás.

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert keretnek (frame) nevezünk.

Példa

Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor (x_1, x_2) transzformáltja $(1/2)(2x_1,\ -x_2 + \sqrt{3}x_2,\ -x_2 - \sqrt{3}x_2)$.

Előnyök

- Ez egyfajta hibajavító kódolás.
- Több információt kaphatunk az eredeti jelről.

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert keretnek (frame) nevezünk.

Példa

Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor (x_1, x_2) transzformáltja $(1/2)(2x_1,\ -x_2+\sqrt{3}x_2,\ -x_2-\sqrt{3}x_2)$.

Előnyök

- Ez egyfajta hibajavító kódolás.
- Több információt kaphatunk az eredeti jelről.

Irodalom: short-time (windowed) Fourier-transform,

Redundáns koordinátázás

Ha $X^T = S^* x^T$ diszkrét Fourier-transzformáció, akkor X_k az S megfelelő oszlopával vett skaláris szorzata x-nek. Az S oszlopai helyett válasszunk olyan vektorrendszert, ami generátorrendszer, de nem bázis. Egy-egy ilyen (megfelelő tulajdonságú) vektorrendszert **keretnek** (frame) nevezünk.

Példa

Vegyük a három harmadik egységgyököt a valós síkon. Ekkor (x_1, x_2) transzformáltja $(1/2)(2x_1, \ -x_2 + \sqrt{3}x_2, \ -x_2 - \sqrt{3}x_2)$.

Előnyök

- Ez egyfajta hibajavító kódolás.
- Több információt kaphatunk az eredeti jelről.

Irodalom: short-time (windowed) Fourier-transform, Gabor-frame. (Gábor Dénes).

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben.

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain.

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere.

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$).

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben.
Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis,
ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere.
Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$).
(Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik.

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás).

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás). Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$,

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120^\circ$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás). Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) =$ $= (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d,\mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120^\circ$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás). Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) =$ $= (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ (fáziseltolás).

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás). Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) =$ $= (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ (fáziseltolás). HF: Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i \sin(2\pi/d)$.

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben.
Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis,
ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere.
Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$).
(Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik.
Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás).
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) =$
$= (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ (fáziseltolás).
HF: Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i \sin(2\pi/d)$.
A T és W által generált G részcsoport irreducibilis $\mathbb{C}^d$-n,

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben.
Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis,
ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere.
Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$).
(Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik.
Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás).
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) =$
$= (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ (fáziseltolás).
HF: Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i \sin(2\pi/d)$.
A T és W által generált G részcsoport irreducibilis $\mathbb{C}^d$-n,
T és W rendje d,

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben.
Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis,
ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere.
Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$).
(Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik.
Legyen $T : (x_0, x_1, \dots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \dots, x_{d-2})$ (időeltolás).
Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \dots, Y_{d-1}) =$
$= (X_{d-1}, X_0, \dots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ (fáziseltolás).
HF: Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i \sin(2\pi/d)$.
A T és W által generált G részcsoport irreducibilis $\mathbb{C}^d$-n,
T és W rendje d, továbbá $T^{-1}WT = \varepsilon W$

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás). Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) =$
$= (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ (fáziseltolás).
HF: Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i\sin(2\pi/d)$.
A T és W által generált G részcsoport irreducibilis $\mathbb{C}^d$-n, T és W rendje d, továbbá $T^{-1}WT = \varepsilon W$ és G rendje d^3.

Mátrixcsoportok

Legyen G véges, unitér mátrixokból álló részcsoport $\mathrm{GL}(d, \mathbb{C})$-ben. Ez mátrixszorzással hat $\mathbb{C}^d$ vektorain. A hatás irreducibilis, ha G elemeinek nincs közös, nemtriviális invariáns altere. Másképp: G minden pályája generátorrendszer $\mathbb{C}^d$-ben (kivéve $\{0\}$). (Ez kapcsolódik a csoportalgebra mátrixgyűrűkre bontásához.)

Ekkor G pályái jó tulajdonságú kereteket adnak.

Az iménti példa a $k \cdot 120°$-os forgatások csoportjából származik. Legyen $T : (x_0, x_1, \ldots, x_{d-1}) \mapsto (x_{d-1}, x_0, \ldots, x_{d-2})$ (időeltolás). Ha $\mathcal{F}(\mathrm{x}) = \mathrm{X}$ és $\mathcal{F}(\mathrm{y}) = \mathrm{Y}$, akkor $(Y_0, Y_1, \ldots, Y_{d-1}) =$ $= (X_{d-1}, X_0, \ldots, X_{d-2})$ esetén legyen $W(\mathrm{x}) = \mathrm{y}$ (fáziseltolás).
HF: Ilyenkor $y_j = \varepsilon^j x_j$, ahol $\varepsilon = \cos(2\pi/d) + i \sin(2\pi/d)$.
A T és W által generált G részcsoport irreducibilis $\mathbb{C}^d$-n, T és W rendje d, továbbá $T^{-1}WT = \varepsilon W$ és G rendje d^3.
A Gabor-keret ennek a skalármátrixok normálosztója szerinti faktorából származtatható.