Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

14.* előadás

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben.

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben. Például a kockakettőzés feladata akkor lenne megoldható, ha racionális koordinátájú pontokból indulva ebben benne lenne a $\sqrt[3]{2}$.

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben. Például a kockakettőzés feladata akkor lenne megoldható, ha racionális koordinátájú pontokból indulva ebben benne lenne a $\sqrt[3]{2}$.

Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának vizsgálatában is testet alkotnak az úgynevezett gyökkifejezések.

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben. Például a kockakettőzés feladata akkor lenne megoldható, ha racionális koordinátájú pontokból indulva ebben benne lenne a $\sqrt[3]{2}$.

Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának vizsgálatában is testet alkotnak az úgynevezett gyökkifejezések.
Diofantikus egyenletek vizsgálatakor hasznos a szorzattá bontást $\mathbb{C}$ résztesteiben elvégezni,

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben. Például a kockakettőzés feladata akkor lenne megoldható, ha racionális koordinátájú pontokból indulva ebben benne lenne a $\sqrt[3]{2}$.

Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának vizsgálatában is testet alkotnak az úgynevezett gyökkifejezések.
Diofantikus egyenletek vizsgálatakor hasznos a szorzattá bontást $\mathbb{C}$ résztesteiben elvégezni, pl. $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$.

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben. Például a kockakettőzés feladata akkor lenne megoldható, ha racionális koordinátájú pontokból indulva ebben benne lenne a $\sqrt[3]{2}$.

Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának vizsgálatában is testet alkotnak az úgynevezett gyökkifejezések.
Diofantikus egyenletek vizsgálatakor hasznos a szorzattá bontást $\mathbb{C}$ résztesteiben elvégezni, pl. $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$.

A hibajavító kódok elméletében a véges testek játszanak szerepet.

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben. Például a kockakettőzés feladata akkor lenne megoldható, ha racionális koordinátájú pontokból indulva ebben benne lenne a $\sqrt[3]{2}$.

Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának vizsgálatában is testet alkotnak az úgynevezett gyökkifejezések.
Diofantikus egyenletek vizsgálatakor hasznos a szorzattá bontást $\mathbb{C}$ résztesteiben elvégezni, pl. $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$.

A hibajavító kódok elméletében a véges testek játszanak szerepet.

Ezekben az alkalmazásokban tipikusan egy test résztesteit kell felderíteni,

A résztestek fontossága

Adottak a síkon pontok. Azon pontok koordinátái, amelyek ezekből kiindulva megszerkeszthetők, résztestet alkotnak $\mathbb{R}$-ben. Például a kockakettőzés feladata akkor lenne megoldható, ha racionális koordinátájú pontokból indulva ebben benne lenne a $\sqrt[3]{2}$.

Egyenletek gyökjelekkel való megoldhatóságának vizsgálatában is testet alkotnak az úgynevezett gyökkifejezések.
Diofantikus egyenletek vizsgálatakor hasznos a szorzattá bontást $\mathbb{C}$ résztesteiben elvégezni, pl. $x^2 + y^2 = (x + iy)(x - iy)$.

A hibajavító kódok elméletében a véges testek játszanak szerepet.

Ezekben az alkalmazásokban tipikusan egy test résztesteit kell felderíteni, vagy olyan kérdésekre adni választ, hogy $\sqrt[3]{2}$ felírható-e racionális számokból kiindulva négyzetgyökvonások segítségével.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K részteste L-nek,

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztese L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztestе L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan résztestе L-nek,

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K részteste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan részteste L-nek, amely K-t

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztеste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan résztеste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K részteste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan részteste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest,

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztest L-nek, akkor **testbővítésről** beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a **legszűkebb** olyan résztest L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$,

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztteste L-nek, akkor **testbővítésről** beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a **legszűkebb** olyan résztteste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$,

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztteste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan résztteste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K részteste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan részteste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.
Egyszerű bővítés: $K \leq K(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in L$-re.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztestе L-nek, akkor **testbővítésről** beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a **legszűkebb** olyan résztestе L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.
Egyszerű bővítés: $K \leq K(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in L$-re.

$K(\alpha, \beta, \ldots)$ tehát olyan, mint lineáris algebrában a generált altér.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K részteste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan részteste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.
Egyszerű bővítés: $K \leq K(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in L$-re.

$K(\alpha, \beta, \ldots)$ tehát olyan, mint lineáris algebrában a generált altér.
De elemei nem lineáris kombinációk, hanem úgy kaphatók, hogy vesszük az $\alpha, \beta, \ldots$ elemek összes, többhatározatlanú K-beli együtthatós polinomjait,

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztestе L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan résztestе L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.
Egyszerű bővítés: $K \leq K(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in L$-re.

$K(\alpha, \beta, \ldots)$ tehát olyan, mint lineáris algebrában a generált altér. De elemei nem lineáris kombinációk, hanem úgy kaphatók, hogy vesszük az $\alpha, \beta, \ldots$ elemek összes, többhatározatlanú K-beli együtthatós polinomjait, majd ezek hányadosait.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K résztest L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan résztest L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.
Egyszerű bővítés: $K \leq K(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in L$-re.

$K(\alpha, \beta, \ldots)$ tehát olyan, mint lineáris algebrában a generált altér. De elemei nem lineáris kombinációk, hanem úgy kaphatók, hogy vesszük az $\alpha, \beta, \ldots$ elemek összes, többhatározatlanú K-beli együtthatós polinomjait, majd ezek hányadosait.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K részteste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan részteste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.
Egyszerű bővítés: $K \leq K(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in L$-re.

$K(\alpha, \beta, \ldots)$ tehát olyan, mint lineáris algebrában a generált altér. De elemei nem lineáris kombinációk, hanem úgy kaphatók, hogy vesszük az $\alpha, \beta, \ldots$ elemek összes, többhatározatlanú K-beli együtthatós polinomjait, majd ezek hányadosait.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Összeadásra, kivonásra, szorzásra zártság: HF.

Generált résztest

6.1.5. Definíció

Ha K részteste L-nek, akkor testbővítésről beszélünk.
Ha $\alpha, \beta, \ldots \in L$, akkor $N = K(\alpha, \beta, \ldots)$ a legszűkebb olyan részteste L-nek, amely K-t és az $\alpha, \beta, \ldots$ elemeket tartalmazza.
Vagyis ha $T \leq L$ résztest, $K \subseteq T$, $\alpha, \beta, \ldots \in T$, akkor $N \subseteq T$.
Egyszerű bővítés: $K \leq K(\alpha)$ alkalmas $\alpha \in L$-re.

$K(\alpha, \beta, \ldots)$ tehát olyan, mint lineáris algebrában a generált altér. De elemei nem lineáris kombinációk, hanem úgy kaphatók, hogy vesszük az $\alpha, \beta, \ldots$ elemek összes, többhatározatlanú K-beli együtthatós polinomjait, majd ezek hányadosait.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Összeadásra, kivonásra, szorzásra zártság: HF.
Reciprokra zártság: kerülő úton.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a+bi$ alakú számok $(a, b \in \mathbb{Q})$ részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok $(a, b \in \mathbb{Q})$ részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is:

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} =$

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\dfrac{1}{a + bi} = \dfrac{a - bi}{a^2 + b^2}$,

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok $(a, b \in \mathbb{Q})$ részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\frac{1}{a+bi} = \frac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok ($\text{ahol } a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok $(a, b \in \mathbb{Q})$ részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok (ahol $a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.

Valóban: Összeadásra, ellentettképzésre zárt,

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok $(a, b \in \mathbb{Q})$ részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.
Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok (ahol $a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.
Valóban: Összeadásra, ellentettképzésre zárt, $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$: HF.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.
Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok (ahol $a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.
Valóban: Összeadásra, ellentettképzésre zárt, $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$: HF.
Ha $a + b\sqrt{u}, c + d\sqrt{u} \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$,

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.
Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok ($\text{ahol } a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.
Valóban: Összeadásra, ellentettképzésre zárt, $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$: HF.
Ha $a + b\sqrt{u}, c + d\sqrt{u} \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$, akkor

$$(a + b\sqrt{u})(c + d\sqrt{u}) = (ac + bdu) + (ad + bc)\sqrt{u}.$$

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok ($a, b \in \mathbb{Q}$) részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.
Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok (ahol $a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.
Valóban: Összeadásra, ellentettképzésre zárt, $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$: HF.
Ha $a + b\sqrt{u}, c + d\sqrt{u} \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$, akkor

$$(a + b\sqrt{u})(c + d\sqrt{u}) = (ac + bdu) + (ad + bc)\sqrt{u}.$$

Itt $ac + bdu \in BQ$ és $ac + bc \in \mathbb{Q}$, ezért szorzásra is zárt.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok $(a, b \in \mathbb{Q})$ részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.

Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok (ahol $a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.

Valóban: Összeadásra, ellentettképzésre zárt, $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$: HF.

Ha $a + b\sqrt{u}, c + d\sqrt{u} \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$, akkor

$$(a + b\sqrt{u})(c + d\sqrt{u}) = (ac + bdu) + (ad + bc)\sqrt{u}.$$

Itt $ac + bdu \in BQ$ és $ac + bc \in \mathbb{Q}$, ezért szorzásra is zárt.

Reciprokképzés: $\dfrac{1}{a+b\sqrt{u}} = \dfrac{a-b\sqrt{u}}{a^2-b^2u}$.

Bővítés egy szám négyzetgyökével

Gauss-racionális számok

Az $a + bi$ alakú számok $(a, b \in \mathbb{Q})$ részgyűrűt alkotnak $\mathbb{C}$-ben.
Ez résztest is: $\dfrac{1}{a+bi} = \dfrac{a-bi}{a^2+b^2}$, és $\dfrac{a}{a^2+b^2}, \dfrac{-b}{a^2+b^2} \in \mathbb{Q}$.

Általánosítás

Legyen $u \in Q$ rögzített szám. Az $a + b\sqrt{u}$ alakú számok (ahol $a, b \in \mathbb{Q}$) résztestet alkotnak $\mathbb{C}$-ben. HF: Ez $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$.
Valóban: Összeadásra, ellentettképzésre zárt, $0 \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$: HF.
Ha $a + b\sqrt{u}, c + d\sqrt{u} \in \mathbb{Q}(\sqrt{u})$, akkor

$$(a + b\sqrt{u})(c + d\sqrt{u}) = (ac + bdu) + (ad + bc)\sqrt{u}.$$

Itt $ac + bdu \in BQ$ és $ac + bc \in \mathbb{Q}$, ezért szorzásra is zárt.
Reciprokképzés: $\dfrac{1}{a+b\sqrt{u}} = \dfrac{a-b\sqrt{u}}{a^2-b^2u}$. Lehet-e $a^2 - b^2u = 0$?

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2u = 0$?

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.
Ha $b = d$, akkor $a = c$.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.
Ha $b = d$, akkor $a = c$. Ha nem: $\sqrt{u} = (a - c)/(d - b) \in \mathbb{Q}$ lenne.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.
Ha $b = d$, akkor $a = c$. Ha nem: $\sqrt{u} = (a - c)/(d - b) \in \mathbb{Q}$ lenne.

Ezért ha $a - b\sqrt{u} = 0$, akkor $a = b = 0$, és $a + b\sqrt{u}$ is nulla lenne.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.
Ha $b = d$, akkor $a = c$. Ha nem: $\sqrt{u} = (a - c)/(d - b) \in \mathbb{Q}$ lenne.

Ezért ha $a - b\sqrt{u} = 0$, akkor $a = b = 0$, és $a + b\sqrt{u}$ is nulla lenne.
Vagyis az $a + b\sqrt{u}$ számok mindenképpen testet alkotnak.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.
Ha $b = d$, akkor $a = c$. Ha nem: $\sqrt{u} = (a - c)/(d - b) \in \mathbb{Q}$ lenne.

Ezért ha $a - b\sqrt{u} = 0$, akkor $a = b = 0$, és $a + b\sqrt{u}$ is nulla lenne.
Vagyis az $a + b\sqrt{u}$ számok mindenképpen testet alkotnak.

Fontos lenne $\mathbb{Q}(\alpha)$ elemeit jól kezelhető, egyértelmű alakban fölírni.

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.
Ha $b = d$, akkor $a = c$. Ha nem: $\sqrt{u} = (a - c)/(d - b) \in \mathbb{Q}$ lenne.

Ezért ha $a - b\sqrt{u} = 0$, akkor $a = b = 0$, és $a + b\sqrt{u}$ is nulla lenne.
Vagyis az $a + b\sqrt{u}$ számok mindenképpen testet alkotnak.

Fontos lenne $\mathbb{Q}(\alpha)$ elemeit jól kezelhető, egyértelmű alakban fölírni.
Pl.: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \,:\, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$;

A reciprok $\mathbb{Q}(\sqrt{u})$-ban van-e

$a, b, u \in \mathbb{Q}$, $a + b\sqrt{u} \neq 0$. Előfordulhat-e, hogy $a^2 - b^2 u = 0$?

Előfordulhat! Például ha $a = 2$, $b = 1$, $u = 4$.
De ekkor sincs baj, mert $a + b\sqrt{u} = 4$ reciproka $1/4 \in \mathbb{Q}(\sqrt{4})$.

Két eset van:

Ha $\sqrt{u} \in \mathbb{Q}$, akkor $\mathbb{Q}(\sqrt{u}) = \mathbb{Q}$, ami test.

Ha nem, akkor az $a + b\sqrt{u}$ előállítás egyértelmű.
Valóban: $a + b\sqrt{u} = c + d\sqrt{u} \implies a - c = (d - b)\sqrt{u}$.
Ha $b = d$, akkor $a = c$. Ha nem: $\sqrt{u} = (a - c)/(d - b) \in \mathbb{Q}$ lenne.

Ezért ha $a - b\sqrt{u} = 0$, akkor $a = b = 0$, és $a + b\sqrt{u}$ is nulla lenne.
Vagyis az $a + b\sqrt{u}$ számok mindenképpen testet alkotnak.

Fontos lenne $\mathbb{Q}(\alpha)$ elemeit jól kezelhető, egyértelmű alakban fölírni.
Pl.: $\mathbb{Q}(\sqrt[3]{2}) = \{a + b\sqrt[3]{2} + c\sqrt[3]{4} \, : \, a, b, c \in \mathbb{Q}\}$; a, b, c egyértelmű.

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$.

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált,

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K résszteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált, $K[x]$-beli polinom,

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K résztteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált, $K[x]$-beli polinom, amelynek α gyöke.

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált, $K[x]$-beli polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in K[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált, $K[x]$-beli polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in K[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.
A minimálpolinom egyértelműen meghatározott.

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K résztteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált, $K[x]$-beli polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in K[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.
A minimálpolinom egyértelműen meghatározott.
Ha $f \in K[x]$ normált és $f(\alpha) = 0$,

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált, $K[x]$-beli polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in K[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.
A minimálpolinom egyértelműen meghatározott.
Ha $f \in K[x]$ normált és $f(\alpha) = 0$, akkor $f = m_\alpha$ pontosan akkor teljesül, ha f irreducibilis K fölött.

Minimálpolinom test fölött

6.1.11. Definíció

Legyen K részteste L-nek (főpélda: $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$).
Az $\alpha \in L$ algebrai K fölött, ha van olyan nem nulla $f \in K[x]$, melyre $f(\alpha) = 0$. Különben α transzcendens K fölött.

6.1.13. Tétel, 5.10.10. Tétel

Egy K fölött algebrai $\alpha \in L$ elem m_α minimálpolinomja K fölött a legalacsonyabb fokú olyan normált, $K[x]$-beli polinom, amelynek α gyöke.
Minden $f \in K[x]$-re $f(\alpha) = 0 \iff m_\alpha \mid f$.
A minimálpolinom egyértelműen meghatározott.
Ha $f \in K[x]$ normált és $f(\alpha) = 0$, akkor $f = m_\alpha$ pontosan akkor teljesül, ha f irreducibilis K fölött.

A bizonyítás ugyanaz, mint a már látott $\mathbb{Q} \leq \mathbb{C}$ esetben.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K résztteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.
Legyen $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.
Legyen $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$.
Ekkor $f(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_k\alpha^k$ az α egy polinomja.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.
Legyen $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$.
Ekkor $f(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_k\alpha^k$ az α egy polinomja.

Az α minden polinomja benne van T-ben.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.
Legyen $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$.
Ekkor $f(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_k\alpha^k$ az α egy polinomja.

Az α minden polinomja benne van T-ben. Valóban:
ha $f \in K[x]$ akkor $f(x) = m_\alpha(x)q(x) + (a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})$
(maradékos osztás).

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.
Legyen $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$.
Ekkor $f(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_k\alpha^k$ az α egy polinomja.

Az α minden polinomja benne van T-ben. Valóban:
ha $f \in K[x]$ akkor $f(x) = m_\alpha(x)q(x) + (a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})$
(maradékos osztás). Innen $f(\alpha) = a_0 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \in T$.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K résztteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.
Legyen $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$.
Ekkor $f(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_k\alpha^k$ az α egy polinomja.

Az α minden polinomja benne van T-ben. Valóban:
ha $f \in K[x]$ akkor $f(x) = m_\alpha(x)q(x) + (a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})$
(maradékos osztás). Innen $f(\alpha) = a_0 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \in T$.

Így T az α (K-beli együtthatós) polinomjainak halmaza.

Elem normálalakja

6.1.16. Tétel

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor $K(\alpha)$ elemei egyértelműen fölírhatók
$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$.

Jelölje T az $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakú elemek halmazát.
Nyilván $K \subseteq T \subseteq K(\alpha)$ és $\alpha \in T$. Kell: T test.
Legyen $f(x) = b_0 + b_1x + \ldots + b_kx^k \in K[x]$.
Ekkor $f(\alpha) = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_k\alpha^k$ az α egy polinomja.

Az α minden polinomja benne van T-ben. Valóban:
ha $f \in K[x]$ akkor $f(x) = m_\alpha(x)q(x) + (a_0 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1})$
(maradékos osztás). Innen $f(\alpha) = a_0 + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} \in T$.

Így T az α (K-beli együtthatós) polinomjainak halmaza.
Ezért T zárt összeadásra, kivonásra és szorzásra is.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú,

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.
Így $p(\alpha) \in K(\alpha)$ reciproka $g(\alpha)$-nak.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.
Így $p(\alpha) \in K(\alpha)$ reciproka $g(\alpha)$-nak.

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.
Így $p(\alpha) \in K(\alpha)$ reciproka $g(\alpha)$-nak.

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Legyen $f(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1}$.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.
Így $p(\alpha) \in K(\alpha)$ reciproka $g(\alpha)$-nak.

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Legyen $f(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1}$.
Ekkor $f(\alpha) = 0$,

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.
Így $p(\alpha) \in K(\alpha)$ reciproka $g(\alpha)$-nak.

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Legyen $f(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1}$.
Ekkor $f(\alpha) = 0$, és így $m_\alpha \mid f$.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.
Így $p(\alpha) \in K(\alpha)$ reciproka $g(\alpha)$-nak.

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Legyen $f(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1}$.
Ekkor $f(\alpha) = 0$, és így $m_\alpha \mid f$. Mivel f legfeljebb $n-1$-edfokú, csak a nullapolinom lehet.

Elem normálalakja: bizonyítás

Reciprokképzés:

Legyen $g \in K(x)$, $g(\alpha) \neq 0$, $\mathrm{gr}(g) \leq n-1$.
Mivel m_α irreducibilis és n-edfokú, m_α és g relatív prímek.
Ezért van olyan $p, q \in K[x]$, hogy $pg + qm_\alpha = 1$.
Innen $x \mapsto \alpha$ helyettesítéssel $p(\alpha)g(\alpha) = 1$.
Így $p(\alpha) \in K(\alpha)$ reciproka $g(\alpha)$-nak.

Egyértelműség:

Tegyük fel, hogy

$$a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1} = b_0 + b_1\alpha + \ldots + b_{n-1}\alpha^{n-1}.$$

Legyen $f(x) = (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x^{n-1}$.
Ekkor $f(\alpha) = 0$, és így $m_\alpha \mid f$. Mivel f legfeljebb $n-1$-edfokú, csak a nullapolinom lehet. Így $a_j = b_j$ minden j-re. $\square$

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust,
ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel.

.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust,
ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$

.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust,
ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$

.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust,
ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$
(hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza,

.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust,
ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$
(hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza,
a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme).

.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust, ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust,
ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.
Mivel m_α irreducibilis, a gyűrűknél tanultak szerint T test. $\square$

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust, ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.
Mivel m_α irreducibilis, a gyűrűknél tanultak szerint T test. $\square$

6.1.9. Tétel, 6.1.21. Gyakorlat (HF)

Legyen K részteste L-nek és $\alpha \in L$ transzcendens K fölött.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust, ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.
Mivel m_α irreducibilis, a gyűrűknél tanultak szerint T test. □

6.1.9. Tétel, 6.1.21. Gyakorlat (HF)

Legyen K részteste L-nek és $\alpha \in L$ transzcendens K fölött. Ekkor $K(\alpha)$, azaz L-nek a K-t és α-t tartalmazó legszűkebb részteste

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust, ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.
Mivel m_α irreducibilis, a gyűrűknél tanultak szerint T test. □

6.1.9. Tétel, 6.1.21. Gyakorlat (HF)

Legyen K részteste L-nek és $\alpha \in L$ transzcendens K fölött. Ekkor $K(\alpha)$, azaz L-nek a K-t és α-t tartalmazó legszűkebb részteste az összes olyan $f(\alpha)/g(\alpha)$ törtekből áll, ahol $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$.

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust, ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.
Mivel m_α irreducibilis, a gyűrűknél tanultak szerint T test. □

6.1.9. Tétel, 6.1.21. Gyakorlat (HF)

Legyen K részteste L-nek és $\alpha \in L$ transzcendens K fölött. Ekkor $K(\alpha)$, azaz L-nek a K-t és α-t tartalmazó legszűkebb résztestе az összes olyan $f(\alpha)/g(\alpha)$ törtekből áll, ahol $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$. Ez az előállítás egyértelmű is a következő értelemben:

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust, ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.
Mivel m_α irreducibilis, a gyűrűknél tanultak szerint T test. □

6.1.9. Tétel, 6.1.21. Gyakorlat (HF)

Legyen K résztest L-nek és $\alpha \in L$ transzcendens K fölött. Ekkor $K(\alpha)$, azaz L-nek a K-t és α-t tartalmazó legszűkebb résztest az összes olyan $f(\alpha)/g(\alpha)$ törtekből áll, ahol $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$. Ez az előállítás egyértelmű is a következő értelemben:
$f(\alpha)/g(\alpha) = h(\alpha)/k(\alpha)$

A transzcendens eset

Reciprokképzés (második bizonyítás):

Tekintsük azt a $\varphi : K[x] \to L$ homomorfizmust, ami f-hez $f(\alpha)$-t rendel. Nyilván $T = \mathrm{Im}(\varphi)$ és $(m_\alpha) = \mathrm{Ker}(\varphi)$ (hiszen T az α K-beli együtthatós polinomjainak a halmaza, a minimálpolinom pedig a $\mathrm{Ker}(\varphi)$ főideál generátoreleme). Így a homomorfizmus-tétel miatt $T \cong K[x]/(m_\alpha)$.
Mivel m_α irreducibilis, a gyűrűknél tanultak szerint T test. □

6.1.9. Tétel, 6.1.21. Gyakorlat (HF)

Legyen K részteste L-nek és $\alpha \in L$ transzcendens K fölött. Ekkor $K(\alpha)$, azaz L-nek a K-t és α-t tartalmazó legszűkebb résztteste az összes olyan $f(\alpha)/g(\alpha)$ törtekből áll, ahol $f, g \in K[x]$, $g \neq 0$.
Ez az előállítás egyértelmű is a következő értelemben:
$f(\alpha)/g(\alpha) = h(\alpha)/k(\alpha) \iff f(x)k(x) = g(x)h(x)$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$.
Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq T$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq T$.

$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$.
Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq T$.
$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq S$

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) \subseteq T$.

$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq S$ és $\sqrt{2}, \sqrt{3} \in S$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq T$.
$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq S$ és $\sqrt{2},\sqrt{3} \in S$. Mivel S résztest, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq S$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq T$.

$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq S$ és $\sqrt{2},\sqrt{3} \in S$. Mivel S résztest, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq S$. Így $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \subseteq S$. $\square$

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \le \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$.
Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq T$.
$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq S$ és $\sqrt{2},\sqrt{3} \in S$.
Mivel S résztest, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq S$. Így $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \subseteq S$. □

6.1.8. Gyakorlat, HF

(1) $\big(K(\alpha)\big)(\beta) = K(\alpha,\beta) = \big(K(\beta)\big)(\alpha)$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \leq \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq T$.
$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq S$ és $\sqrt{2},\sqrt{3} \in S$. Mivel S résztest, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq S$. Így $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \subseteq S$. □

6.1.8. Gyakorlat, HF

(1) $\big(K(\alpha)\big)(\beta) = K(\alpha,\beta) = \big(K(\beta)\big)(\alpha)$.

(2) $K(\alpha,\beta) = K(\alpha,\alpha+\beta)$.

A generálásfogalom haszna

Kulcs: $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \le \mathbb{C}$.

Bizonyítás

$\subseteq$: Legyen $T = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$. Ekkor $\sqrt{3} \in T$ és $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq T$. Ezért $\mathbb{Q} \subseteq T$ és $\sqrt{2} \in T$. Mivel T résztest, így $\mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3}) \subseteq T$.
$\supseteq$: Legyen $S = \mathbb{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$. Ekkor $\mathbb{Q} \subseteq S$ és $\sqrt{2},\sqrt{3} \in S$. Mivel S résztest, ezért $\mathbb{Q}(\sqrt{2}) \subseteq S$. Így $\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}) \subseteq S$. □

6.1.8. Gyakorlat, HF

(1) $\big(K(\alpha)\big)(\beta) = K(\alpha,\beta) = \big(K(\beta)\big)(\alpha)$.

(2) $K(\alpha,\beta) = K(\alpha,\alpha+\beta)$.

(3) Ha $\alpha \neq 0$, akkor $K(\alpha,\beta) = K(\alpha,\alpha\beta)$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$,

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Ezért $\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Ezért $\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$. Vagyis
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ minden eleme ilyen alakú.

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak, így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú, ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Ezért $\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$. Vagyis $\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ minden eleme ilyen alakú.
Mivel ez test, az ilyen alakú elemek reciproka is ilyen alakú. $\square$

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Ezért $\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$. Vagyis
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ minden eleme ilyen alakú.
Mivel ez test, az ilyen alakú elemek reciproka is ilyen alakú. $\square$

Általánosítás (6.1.22. Gyakorlat)

Ha $K \leq T$ testbővítés és $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in L$ algebrai K fölött,

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \le 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Ezért $\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$. Vagyis
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ minden eleme ilyen alakú.
Mivel ez test, az ilyen alakú elemek reciproka is ilyen alakú. $\square$

Általánosítás (6.1.22. Gyakorlat)

Ha $K \le T$ testbővítés és $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in L$ algebrai K fölött,
akkor $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ elemei $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ alakúak,

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Ezért $\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$. Vagyis
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ minden eleme ilyen alakú.
Mivel ez test, az ilyen alakú elemek reciproka is ilyen alakú. $\square$

Általánosítás (6.1.22. Gyakorlat)

Ha $K \leq T$ testbővítés és $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in L$ algebrai K fölött,
akkor $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ elemei $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ alakúak,
ahol $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$,

$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})$ elemei

$\big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ elemei $\alpha + \gamma\sqrt{3}$, ahol $\alpha, \gamma \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})$.
Valóban: $\sqrt{3}$ gyöke az $x^2 - 3 \in \mathbb{Q}(\sqrt{2})[x]$ polinomnak,
így $\sqrt{3}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ fölött legfeljebb másodfokú,
ezért az $a_0 + a_1\sqrt{3} + \ldots + a_{n-1}\sqrt{3}^{n-1}$ képletben $n \leq 2$.

Itt $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$.
Ezért $\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$. Vagyis
$\mathbb{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3}) = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ minden eleme ilyen alakú.
Mivel ez test, az ilyen alakú elemek reciproka is ilyen alakú. $\square$

Általánosítás (6.1.22. Gyakorlat)

Ha $K \leq T$ testbővítés és $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in L$ algebrai K fölött,
akkor $K(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ elemei $p(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ alakúak,
ahol $p \in K[x_1, \ldots, x_n]$, így osztásra nincs szükség.

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás,

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka,

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka, jele $|L : K|$.

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka, jele $|L : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ algebrai K fölött, akkor $|K(\alpha) : K| = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka, jele $|L : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ algebrai K fölött, akkor $|K(\alpha) : K| = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

Bizonyítás

$K(\alpha)$ elemei egyértelműen $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban írhatók,

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka, jele $|L : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ algebrai K fölött, akkor $|K(\alpha) : K| = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

Bizonyítás

$K(\alpha)$ elemei egyértelműen $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban
írhatók, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka, jele $|L : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ algebrai K fölött, akkor $|K(\alpha) : K| = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

Bizonyítás

$K(\alpha)$ elemei egyértelműen $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban írhatók, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka, jele $|L : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ algebrai K fölött, akkor $|K(\alpha) : K| = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

Bizonyítás

$K(\alpha)$ elemei egyértelműen $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban
írhatók, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ezért $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ bázis L-ben K fölött,

A testbővítés, mint vektortér

Állítás (5.10.4. Gyakorlat, HF)

Ha $K \leq L$ testbővítés, akkor L vektortér K fölött.
Az összeadás az L-beli összeadás, az L elemeinek
a K elemeivel, mint skalárokkal szorzása az L-beli szorzás.
E vektortér dimenziója a testbővítés foka, jele $|L : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ algebrai K fölött, akkor $|K(\alpha) : K| = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

Bizonyítás

$K(\alpha)$ elemei egyértelműen $a_0 + a_1\alpha + \ldots + a_{n-1}\alpha^{n-1}$ alakban
írhatók, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in K$ és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ezért $1, \alpha, \ldots, \alpha^{n-1}$ bázis L-ben K fölött, elemszáma n. $\square$

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α **foka** K fölött,

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α foka K fölött, jele $\mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α **foka** K fölött, jele $\mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Tehát $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$.

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α **foka** K fölött, jele $\mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Tehát $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ transzcendens K fölött, akkor $|K(\alpha) : K|$ végtelen.

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K résztest e L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α foka K fölött, jele $\mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Tehát $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ transzcendens K fölött, akkor $|K(\alpha) : K|$ végtelen.

Valóban: $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$ független K fölött minden k-ra.

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α **foka** K fölött, jele $\mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Tehát $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ transzcendens K fölött, akkor $|K(\alpha) : K|$ végtelen.

Valóban: $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$ független K fölött minden k-ra.

6.1.17. Definíció

$K \leq L$ **véges bővítés**, ha L véges dimenziós K fölött.

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K részteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α foka K fölött, jele $\mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Tehát $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ transzcendens K fölött, akkor $|K(\alpha) : K|$ végtelen.

Valóban: $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$ független K fölött minden k-ra.

6.1.17. Definíció

$K \leq L$ véges bővítés, ha L véges dimenziós K fölött.

Tehát $K \leq K(\alpha)$ akkor és csak akkor véges bővítés,

Véges bővítés

6.1.18. Definíció

Legyen K résztteste L-nek, $\alpha \in L$ algebrai és $n = \mathrm{gr}(m_\alpha)$.
Ekkor az n szám az α **foka** K fölött, jele $\mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Tehát $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$.

6.1.20. Következmény

Ha $\alpha \in L$ transzcendens K fölött, akkor $|K(\alpha) : K|$ végtelen.

Valóban: $1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^k$ független K fölött minden k-ra.

6.1.17. Definíció

$K \leq L$ **véges bővítés**, ha L véges dimenziós K fölött.

Tehát $K \leq K(\alpha)$ akkor és csak akkor véges bővítés,
ha α algebrai K fölött.

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés,

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek.

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}$,

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek. Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}),$

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \le L \le M$ testbővítések, akkor $K \le M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \le L$ és $L \le M$ mindketten végesek. Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}$, $\quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\quad M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$.

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek. Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3}).$

$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$.
$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött (mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad M = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$.
$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött (mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
$1, \sqrt{3}$ bázis M-ben L fölött

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \le L \le M$ testbővítések, akkor $K \le M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \le L$ és $L \le M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad M = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$.
$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött (mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
$1, \sqrt{3}$ bázis M-ben L fölött (mert $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: HF).

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \qquad M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$.
$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött (mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
$1, \sqrt{3}$ bázis M-ben L fölött (mert $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: HF).
Láttuk: az $M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ általános eleme felírható
$\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ alakban,

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \le L \le M$ testbővítések, akkor $K \le M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \le L$ és $L \le M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}, \quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2}), \quad M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$.
$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött (mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
$1, \sqrt{3}$ bázis M-ben L fölött (mert $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: HF).
Láttuk: az $M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ általános eleme felírható
$\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ alakban,
ahol $\alpha = a + b\sqrt{2}$

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \leq L \leq M$ testbővítések, akkor $K \leq M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \leq L$ és $L \leq M$ mindketten végesek. Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}$, $\quad L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $\quad M = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$.
$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött (mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
$1, \sqrt{3}$ bázis M-ben L fölött (mert $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: HF).
Láttuk: az $M = \left(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\right)(\sqrt{3})$ általános eleme felírható
$\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ alakban,
ahol $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$.

A szorzástétel

Tétel (6.2.3. Következmény)

Ha $K \le L \le M$ testbővítések, akkor $K \le M$ pontosan akkor véges bővítés, ha $K \le L$ és $L \le M$ mindketten végesek.
Ilyenkor $|M : K| = |M : L| \cdot |L : K|$.

A bizonyítás gondolata egy példán

$K = \mathbb{Q}$, $L = \mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$.
$1, \sqrt{2}$ bázis L-ben K fölött (mert $\sqrt{2} \notin \mathbb{Q}$).
$1, \sqrt{3}$ bázis M-ben L fölött (mert $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}(\sqrt{2})$: HF).
Láttuk: az $M = \big(\mathbb{Q}(\sqrt{2})\big)(\sqrt{3})$ általános eleme felírható
$\alpha + \gamma\sqrt{3} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$ alakban,
ahol $\alpha = a + b\sqrt{2}$ és $\gamma = c + d\sqrt{3}$.
Ekkor $1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{2}\sqrt{3} = \sqrt{6}$ bázis lesz az $L \le M$ bővítésben.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött,

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak,

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$,

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \le L \le M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik,

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$. Ekkor $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$. Ekkor $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$.
Mivel $u_1, \ldots, u_m$ független L fölött,

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \le L \le M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$. Ekkor $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$.
Mivel $u_1, \ldots, u_m$ független L fölött, mindegyik $\alpha_i = 0$.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$. Ekkor $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$.
Mivel $u_1, \ldots, u_m$ független L fölött, mindegyik $\alpha_i = 0$.
Mivel $v_1, \ldots, v_n$ független K fölött,

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \dots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \dots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \dots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \dots + a_{in} v_n$. Ekkor $\alpha_1 u_1 + \dots + \alpha_m u_m = 0$.
Mivel $u_1, \dots, u_m$ független L fölött, mindegyik $\alpha_i = 0$.
Mivel $v_1, \dots, v_n$ független K fölött, $a_{ij} = 0$ minden i, j-re.

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$. Ekkor $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$.
Mivel $u_1, \ldots, u_m$ független L fölött, mindegyik $\alpha_i = 0$.
Mivel $v_1, \ldots, v_n$ független K fölött, $a_{ij} = 0$ minden i, j-re.
Ezért $v_i u_j$ tényleg független rendszer. $\square$

A szorzástétel bizonyítása

Legyenek $K \leq L \leq M$ testbővítések,
$u_1, \ldots, u_m$ bázis M-ben L fölött, $v_1, \ldots, v_n$ bázis L-ben K fölött.
Elég belátni: az nm darab $v_i u_j$ szorzat bázis M-ben K fölött.

M elemei $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m$ alakúak, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in L$.
Mindegyik $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$, ahol $a_{ij} \in K$.
Behelyettesítve $\sum a_{ij} v_i u_j$ adódik, így $v_i u_j$ generátorrendszer.

A függetlenséghez tegyük föl, hogy $\sum a_{ij} v_i u_j = 0$.
Legyen $\alpha_i = a_{i1} v_1 + \ldots + a_{in} v_n$. Ekkor $\alpha_1 u_1 + \ldots + \alpha_m u_m = 0$.
Mivel $u_1, \ldots, u_m$ független L fölött, mindegyik $\alpha_i = 0$.
Mivel $v_1, \ldots, v_n$ független K fölött, $a_{ij} = 0$ minden i, j-re.
Ezért $v_i u_j$ tényleg független rendszer. $\square$

A bővítések végességéről szóló állítás HF.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$,

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött,

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$.
Véges dimenziós vektortér altere is véges dimenziós,

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$.
Véges dimenziós vektortér altere is véges dimenziós, ezért $|K(\alpha) : K|$ véges.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$.
Véges dimenziós vektortér altere is véges dimenziós, ezért $|K(\alpha) : K|$ véges. Így α algebrai K fölött,

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$.
Véges dimenziós vektortér altere is véges dimenziós, ezért $|K(\alpha) : K|$ véges. Így α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$. Véges dimenziós vektortér altere is véges dimenziós, ezért $|K(\alpha) : K|$ véges. Így α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$. A szorzástételt alkalmazzuk a

$$K \leq K(\alpha) \leq L$$

testláncra.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$. Véges dimenziós vektortér altere is véges dimenziós, ezért $|K(\alpha) : K|$ véges. Így α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$. A szorzástételt alkalmazzuk a

$$K \leq K(\alpha) \leq L$$

testláncra. Azt kapjuk, hogy $|L : K| = |L : K(\alpha)| \cdot \mathrm{gr}_K(\alpha)$.

A szorzástétel első következménye

6.2.4. Állítás

Elem foka osztója a bővítés fokának. Pontosabban:
Ha $K \leq L$ véges bővítés és $\alpha \in L$, akkor α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak.

Bizonyítás

Mivel $\alpha \in L$, a generált résztest definíciója miatt $K(\alpha) \subseteq L$.
Véges dimenziós vektortér altere is véges dimenziós, ezért $|K(\alpha) : K|$ véges. Így α algebrai K fölött, és $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$. A szorzástételt alkalmazzuk a

$$K \leq K(\alpha) \leq L$$

testláncra. Azt kapjuk, hogy $|L : K| = |L : K(\alpha)| \cdot \mathrm{gr}_K(\alpha)$.
Ezért $\mathrm{gr}_K(\alpha)$ osztója $|L : K|$-nak. $\square$

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

x^7-6 a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,
és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6})=7$.

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$. Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,
és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,
és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$,

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,
és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött,

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}| = 6k$.

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,
és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}| = 6k$.
De $\sqrt[7]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6})$

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}| = 6k$.
De $\sqrt[7]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6})$ miatt 7 osztója $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}|$-nak.

.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\,\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}\,| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\,\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}\,| = 6k$.
De $\sqrt[7]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6})$ miatt 7 osztója $|\,\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}\,|$-nak.
Ezért $7 \mid 6k$, .

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}| = 6k$.
De $\sqrt[7]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6})$ miatt 7 osztója $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}|$-nak.
Ezért $7 \mid 6k$, ahonnan $(7, 6) = 1$ miatt $7 \mid k$.

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}| = 6k$.
De $\sqrt[7]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6})$ miatt 7 osztója $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}|$-nak.
Ezért $7 \mid 6k$, ahonnan $(7, 6) = 1$ miatt $7 \mid k$.
Így $k = 7$,

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött,
és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}| = 6k$.
De $\sqrt[7]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6})$ miatt 7 osztója $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}|$-nak.
Ezért $7 \mid 6k$, ahonnan $(7, 6) = 1$ miatt $7 \mid k$.
Így $k = 7$, és az is kijött, hogy $x^7 - 7 = m(x)$,

Példa a szorzástétel alkalmazására

Határozzuk meg $\sqrt[7]{6}$ fokát $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

$x^7 - 6$ a Schönemann-Eisenstein miatt irreducibilis $\mathbb{Q}$ fölött, és ezért ez a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}$ fölött. Így $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[7]{6}) = 7$.
Hasonlóan $\mathrm{gr}_{\mathbb{Q}}(\sqrt[6]{7}) = 6$ és $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) : \mathbb{Q}| = 6$.
Legyen $m(x)$ a $\sqrt[7]{6}$ minimálpolinomja $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.
Mivel $x^7 - 6 \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})[x]$-nek gyöke $\sqrt[7]{6}$, ezért $m(x) \mid x^7 - 6$.
Legyen $k = \mathrm{gr}(m)$ a $\sqrt[7]{6}$ foka $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött, ekkor $k \leq 7$.
$\mathbb{Q} \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}) \leq \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})(\sqrt[7]{6})$ miatt $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}| = 6k$.
De $\sqrt[7]{6} \in \mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6})$ miatt 7 osztója $|\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7}, \sqrt[7]{6}) : \mathbb{Q}|$-nak.
Ezért $7 \mid 6k$, ahonnan $(7, 6) = 1$ miatt $7 \mid k$.
Így $k = 7$, és az is kijött, hogy $x^7 - 7 = m(x)$,
vagyis $x^7 - 6$ irreducibilis $\mathbb{Q}(\sqrt[6]{7})$ fölött.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges,

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.

A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.

A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.

Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor **véges**, ha α **algebrai** K fölött.
A $K \leq L$ **véges bővítés**, ha $|L : K|$ véges.
Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.
A $K \leq L$ **algebrai bővítés**, ha L minden eleme algebrai K fölött.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.

A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.

Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.

A $K \leq L$ algebrai bővítés, ha L minden eleme algebrai K fölött.

Tehát minden véges bővítés algebrai.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.
A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.
Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.
A $K \leq L$ algebrai bővítés, ha L minden eleme algebrai K fölött.
Tehát minden véges bővítés algebrai.

6.2.12. Tétel

Az L-nek a K fölött algebrai elemei résztestet alkotnak.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.
A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.
Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.
A $K \leq L$ algebrai bővítés, ha L minden eleme algebrai K fölött.
Tehát minden véges bővítés algebrai.

6.2.12. Tétel

Az L-nek a K fölött algebrai elemei résztestet alkotnak.

Speciálisan az algebrai számok $\mathbb{A}$ halmaza résztest $\mathbb{C}$-ben.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.

A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.

Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.

A $K \leq L$ algebrai bővítés, ha L minden eleme algebrai K fölött.

Tehát minden véges bővítés algebrai.

6.2.12. Tétel

Az L-nek a K fölött algebrai elemei résztestet alkotnak.

Speciálisan az algebrai számok $\mathbb{A}$ halmaza résztest $\mathbb{C}$-ben.

Ez tehát az algebrai számok teste.

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.
A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.
Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.
A $K \leq L$ algebrai bővítés, ha L minden eleme algebrai K fölött.
Tehát minden véges bővítés algebrai.

6.2.12. Tétel

Az L-nek a K fölött algebrai elemei résztestet alkotnak.

Speciálisan az algebrai számok $\mathbb{A}$ halmaza résztest $\mathbb{C}$-ben.
Ez tehát az algebrai számok teste.
A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{A}$ bővítés algebrai (nyilván),

Véges és algebrai bővítés

Ismétlés (6.1.20, 6.2.4, 6.1.11)

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha \in L$. Ekkor $\mathrm{gr}_K(\alpha) = |K(\alpha) : K|$ akkor és csak akkor véges, ha α algebrai K fölött.
A $K \leq L$ véges bővítés, ha $|L : K|$ véges.
Ekkor L minden eleme algebrai K fölött.
A $K \leq L$ algebrai bővítés, ha L minden eleme algebrai K fölött.
Tehát minden véges bővítés algebrai.

6.2.12. Tétel

Az L-nek a K fölött algebrai elemei résztestet alkotnak.

Speciálisan az algebrai számok $\mathbb{A}$ halmaza résztest $\mathbb{C}$-ben.
Ez tehát az algebrai számok teste.
A $\mathbb{Q} \leq \mathbb{A}$ bővítés algebrai (nyilván), de nem véges (HF).

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$,

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.
Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.
Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. $\square$

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.
Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. $\square$

6.2.8. Lemma

Elem foka nagyobb test fölött nem nőhet.

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$. Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. □

6.2.8. Lemma

Elem foka nagyobb test fölött nem nőhet.
Vagyis $K \leq L \leq M$, $\alpha \in M$ esetén $\mathrm{gr}_L(\alpha) \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.
Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. $\square$

6.2.8. Lemma

Elem foka nagyobb test fölött nem nőhet.
Vagyis $K \leq L \leq M$, $\alpha \in M$ esetén $\mathrm{gr}_L(\alpha) \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Ha $s(x)$, illetve $t(x)$ az α minimálpolinomja K, illetve L fölött,

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$. Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. □

6.2.8. Lemma

Elem foka nagyobb test fölött nem nőhet.
Vagyis $K \leq L \leq M$, $\alpha \in M$ esetén $\mathrm{gr}_L(\alpha) \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Ha $s(x)$, illetve $t(x)$ az α minimálpolinomja K, illetve L fölött, akkor
$$t \mid s.$$

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.
Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. $\square$

6.2.8. Lemma

Elem foka nagyobb test fölött nem nőhet.
Vagyis $K \leq L \leq M$, $\alpha \in M$ esetén $\mathrm{gr}_L(\alpha) \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Ha $s(x)$, illetve $t(x)$ az α minimálpolinomja K, illetve L fölött,
akkor $s \in L[x]$ $t \mid s$.

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \leq L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.
Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. □

6.2.8. Lemma

Elem foka nagyobb test fölött nem nőhet.
Vagyis $K \leq L \leq M$, $\alpha \in M$ esetén $\mathrm{gr}_L(\alpha) \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Ha $s(x)$, illetve $t(x)$ az α minimálpolinomja K, illetve L fölött,
akkor $s \in L[x]$ és $s(\alpha) = 0$ miatt $t \mid s$.

Fok bővebb test fölött

6.2.5. Állítás

Algebrai elem k-adik gyöke is algebrai.

Legyen $K \le L$, $\alpha \in L$ és $0 \neq s(x) \in K[x]$, melyre $s(\alpha) = 0$.
Ekkor $\sqrt[k]{\alpha}$ gyöke az $s(x^k) \in K[x]$ nem nulla polinomnak. $\square$

6.2.8. Lemma

Elem foka nagyobb test fölött nem nőhet.
Vagyis $K \le L \le M$, $\alpha \in M$ esetén $\mathrm{gr}_L(\alpha) \le \mathrm{gr}_K(\alpha)$.

Ha $s(x)$, illetve $t(x)$ az α minimálpolinomja K, illetve L fölött,
akkor $s \in L[x]$ és $s(\alpha) = 0$ miatt $t \mid s$.
Így $\mathrm{gr}_L(\alpha) = \mathrm{gr}(t) \le \mathrm{gr}(s) = \mathrm{gr}_K(\alpha)$. $\square$

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$,

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha)(\beta)$ testlánc.

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha)(\beta)$ testlánc. A szorzástétel miatt
$|K(\alpha)(\beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta)$.

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha)(\beta)$ testlánc. A szorzástétel miatt
$|K(\alpha)(\beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta)$.
Láttuk, hogy $K \leq K(\alpha)$ miatt $\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta) \leq \mathrm{gr}_K(\beta)$.

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha)(\beta)$ testlánc. A szorzástétel miatt
$|K(\alpha)(\beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta)$.
Láttuk, hogy $K \leq K(\alpha)$ miatt $\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta) \leq \mathrm{gr}_K(\beta)$.
Ezért $|K(\alpha)(\beta) : K| \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha)(\beta)$ testlánc. A szorzástétel miatt
$|K(\alpha)(\beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta)$.
Láttuk, hogy $K \leq K(\alpha)$ miatt $\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta) \leq \mathrm{gr}_K(\beta)$.
Ezért $|K(\alpha)(\beta) : K| \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.
De $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha)(\beta)$,

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha)(\beta)$ testlánc. A szorzástétel miatt
$|K(\alpha)(\beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta)$.
Láttuk, hogy $K \leq K(\alpha)$ miatt $\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta) \leq \mathrm{gr}_K(\beta)$.
Ezért $|K(\alpha)(\beta) : K| \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.
De $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha)(\beta)$, így fokuk $\leq \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$. $\square$

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \leq L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \leq K(\alpha) \leq K(\alpha)(\beta)$ testlánc. A szorzástétel miatt
$|K(\alpha)(\beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta)$.
Láttuk, hogy $K \leq K(\alpha)$ miatt $\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta) \leq \mathrm{gr}_K(\beta)$.
Ezért $|K(\alpha)(\beta) : K| \leq \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.
De $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha)(\beta)$, így fokuk $\leq \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$. $\square$

Így például $\sqrt[7]{3 - \sqrt[5]{23}} - \sqrt[4]{5 + i\sqrt{7 + \sqrt[6]{3}}}$ is algebrai szám.

Összeg és szorzat foka

6.2.10. Következmény

Legyen $K \le L$ testbővítés, $\alpha, \beta \in L$ algebrai K fölött.
Ekkor $\alpha \pm \beta$, $\alpha\beta$ és $\beta \neq 0$ esetén α/β is algebrai K fölött,
és fokuk legfeljebb $\mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.

Bizonyítás

$K \le K(\alpha) \le K(\alpha)(\beta)$ testlánc. A szorzástétel miatt
$|K(\alpha)(\beta) : K| = \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta)$.
Láttuk, hogy $K \le K(\alpha)$ miatt $\mathrm{gr}_{K(\alpha)}(\beta) \le \mathrm{gr}_K(\beta)$.
Ezért $|K(\alpha)(\beta) : K| \le \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$.
De $\alpha \pm \beta, \alpha\beta, \alpha/\beta \in K(\alpha)(\beta)$, így fokuk $\le \mathrm{gr}_K(\alpha)\mathrm{gr}_K(\beta)$. $\square$

Így például $\sqrt[7]{3 - \sqrt[5]{23}} - \sqrt[4]{5 + i\sqrt{7 + \sqrt[6]{3}}}$ is algebrai szám.
Foka legfeljebb $7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 6$.

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt,

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

2.5.4, 2.5.18, 6.2.20, HF

Tudjuk analízisből, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

2.5.4, 2.5.18, 6.2.20, HF

Tudjuk analízisből, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.
Sem a $\mathbb{Q}$ véges bővítései,

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

2.5.4, 2.5.18, 6.2.20, HF

Tudjuk analízisből, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.
Sem a $\mathbb{Q}$ véges bővítései, sem a véges testek nem algebrailag zártak.

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

2.5.4, 2.5.18, 6.2.20, HF

Tudjuk analízisből, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.
Sem a $\mathbb{Q}$ véges bővítései, sem a véges testek nem algebrailag zártak.

6.4.6, NB

Minden testnek van algebrailag zárt bővítése.

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

2.5.4, 2.5.18, 6.2.20, HF

Tudjuk analízisből, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.
Sem a $\mathbb{Q}$ véges bővítései, sem a véges testek nem algebrailag zártak.

6.4.6, NB

Minden testnek van algebrailag zárt bővítése.

Ezért minden polinomnak számolhatunk formálisan a gyökeivel!

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

2.5.4, 2.5.18, 6.2.20, HF

Tudjuk analízisből, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.
Sem a $\mathbb{Q}$ véges bővítései, sem a véges testek nem algebrailag zártak.

6.4.6, NB

Minden testnek van algebrailag zárt bővítése.

Ezért minden polinomnak számolhatunk formálisan a gyökeivel!
Ez az algebrailag zárt bővítés analízis nélkül is megkonstruálható.

Algebrailag zárt testek

Emlékeztető (2.5.3. Definíció)

Egy T test algebrailag zárt, ha minden nem konstans polinom gyöktényezőkre bomlik T fölött.

2.5.4, 2.5.18, 6.2.20, HF

Tudjuk analízisből, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt.
Sem a $\mathbb{Q}$ véges bővítései, sem a véges testek nem algebrailag zártak.

6.4.6, NB

Minden testnek van algebrailag zárt bővítése.

Ezért minden polinomnak számolhatunk formálisan a gyökeivel!
Ez az algebrailag zárt bővítés analízis nélkül is megkonstruálható.
Halmazelméleti (transzfinit) módszereket igényel.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben véges bővítést kapunk.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám. Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is. Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$
és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben
véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$,

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$
és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben
véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.
Tehát $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)(\alpha) : \mathbb{Q}|$ is véges.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$
és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben
véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.
Tehát $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)(\alpha) : \mathbb{Q}|$ is véges.
Beláttuk, hogy α eleme $\mathbb{Q}$ egy véges bővítésének,

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.
Tehát $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)(\alpha) : \mathbb{Q}|$ is véges.
Beláttuk, hogy α eleme $\mathbb{Q}$ egy véges bővítésének, így algebrai szám.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.
Tehát $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)(\alpha) : \mathbb{Q}|$ is véges.
Beláttuk, hogy α eleme $\mathbb{Q}$ egy véges bővítésének, így algebrai szám.
Tehát minden $f \in \mathbb{A}[x]$ komplex gyökei algebrai számok.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_k x^k \in \mathbb{A}[x]$
és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben
véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.
Tehát $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)(\alpha) : \mathbb{Q}|$ is véges.
Beláttuk, hogy α eleme $\mathbb{Q}$ egy véges bővítésének, így algebrai szám.
Tehát minden $f \in \mathbb{A}[x]$ komplex gyökei algebrai számok.
Mivel $\mathbb{C}$ algebrailag zárt, f gyöktényezőkre bomlik $\mathbb{C}$ fölött.

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.
Tehát $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)(\alpha) : \mathbb{Q}|$ is véges.
Beláttuk, hogy α eleme $\mathbb{Q}$ egy véges bővítésének, így algebrai szám.
Tehát minden $f \in \mathbb{A}[x]$ komplex gyökei algebrai számok.
Mivel $\mathbb{C}$ algebrailag zárt, f gyöktényezőkre bomlik $\mathbb{C}$ fölött.
De minden gyöke $\mathbb{A}$-beli, és így $\mathbb{A}$ fölött is. $\square$

$\mathbb{A}$ algebrailag zárt

6.2.13. Tétel

Az algebrai számok $\mathbb{A}$ teste algebrailag zárt.

Bizonyítás: Legyen $0 \neq f(x) = a_0 + a_1x + \ldots + a_kx^k \in \mathbb{A}[x]$ és $\alpha \in \mathbb{C}$ gyöke f-nek. Belátjuk, hogy α algebrai szám.
Mivel a_j algebrai $\mathbb{Q}$ fölött, algebrai minden bővebb test fölött is.
Ezért az a_j elemekkel sorban bővítve mindegyik lépésben véges bővítést kapunk. Így $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k) : \mathbb{Q}|$ véges.
De $f(x) \in \mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)[x]$, ezért α algebrai $\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)$ fölött.
Tehát $|\mathbb{Q}(a_0, \ldots, a_k)(\alpha) : \mathbb{Q}|$ is véges.
Beláttuk, hogy α eleme $\mathbb{Q}$ egy véges bővítésének, így algebrai szám.
Tehát minden $f \in \mathbb{A}[x]$ komplex gyökei algebrai számok.
Mivel $\mathbb{C}$ algebrailag zárt, f gyöktényezőkre bomlik $\mathbb{C}$ fölött.
De minden gyöke $\mathbb{A}$-beli, és így $\mathbb{A}$ fölött is. $\square$

A bizonyításban kihasználtuk, hogy $\mathbb{C}$ algebrailag zárt!

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.

Egyszerű bővítés,

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.

Egyszerű bővítés, algebrai elem foka.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

Tételek

Egyszerű bővítés elemeinek normálalakja az algebrai és transzcendens esetben.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

Tételek

Egyszerű bővítés elemeinek normálalakja az algebrai és transzcendens esetben. A testbővítések fokainak szorzástétele.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

Tételek

Egyszerű bővítés elemeinek normálalakja az algebrai és transzcendens esetben. A testbővítések fokainak szorzástétele.
Elem foka osztója a bővítés fokának.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

Tételek

Egyszerű bővítés elemeinek normálalakja az algebrai és transzcendens esetben. A testbővítések fokainak szorzástétele.
Elem foka osztója a bővítés fokának.
Véges és algebrai bővítés kapcsolata.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

Tételek

Egyszerű bővítés elemeinek normálalakja az algebrai és transzcendens esetben. A testbővítések fokainak szorzástétele.
Elem foka osztója a bővítés fokának.
Véges és algebrai bővítés kapcsolata.
Összeg és szorzat fokának becslése.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

Tételek

Egyszerű bővítés elemeinek normálalakja az algebrai és transzcendens esetben. A testbővítések fokainak szorzástétele.
Elem foka osztója a bővítés fokának.
Véges és algebrai bővítés kapcsolata.
Összeg és szorzat fokának becslése.
Az algebrai elemek résztestet alkotnak.

A 14. előadás összefoglalója

Fogalmak

Testbővítés. Generált résztest.
Egyszerű bővítés, algebrai elem foka. Testbővítés foka.
Véges és algebrai bővítés.

Tételek

Egyszerű bővítés elemeinek normálalakja az algebrai és transzcendens esetben. A testbővítések fokainak szorzástétele.
Elem foka osztója a bővítés fokának.
Véges és algebrai bővítés kapcsolata.
Összeg és szorzat fokának becslése.
Az algebrai elemek résztestet alkotnak.
Az algebrai számok teste algebrailag zárt.