Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil
Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

13. előadás

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert $\varphi(g') = h$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert $\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert
$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$. Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g)$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \triangleleft G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó, mert $(123)H \neq H(123)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,
mert $(123)H = \{(123), (13))\} \neq H(123)$

Nem minden részcsoport homorfizmusmag

4.7.11. Tétel

A G csoport N részcsoportja akkor és csak akkor magja egy alkalmas, G-n értelmezett homomorfizmusnak, ha a szerinte vett bal és jobb oldali mellékosztályok megegyeznek, vagy ami ezzel ekvivalens, minden $g \in G$ elemre $gN = Ng$.
Az ilyen részcsoport neve normálosztó, jele $N \lhd G$.

Legyen $\varphi : G \mapsto H$ és $\varphi(g) = h$. Ekkor $gN = Ng$, mert

$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g^{-1}g') = 1_H \iff$$
$$\iff g^{-1}g' \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in gN.$$
$$\varphi(g') = h \iff \varphi(g') = \varphi(g) \iff \varphi(g'g^{-1}) = 1_H \iff$$
$$\iff g'g^{-1} \in \mathrm{Ker}(\varphi) = N \iff g' \in Ng.$$

Az S_3 csoportban $H = \{id, (12)\}$ nem normálosztó,
mert $(123)H = \{(123), (13))\} \neq H(123) = \{(123), (23)\}$.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,

egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,

egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1} N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1} N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja,

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja, jele G/N.

Faktorcsoport

4.7.12. Állítás

Legyen G csoport, és N részcsoportja G-nek, melyre $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Álljon a K halmaz az N szerinti mellékosztályokból, és vezessünk be rajta szorzást a

$$(g_1 N) \cdot (g_2 N) = g_1 g_2 N$$

képlettel. Ekkor K csoport,
egységeleme az $N = 1 \cdot N$ mellékosztály, a gN inverze $g^{-1}N$.
Az a $\psi : G \to K$ leképezés, ami g-hez gN-et rendeli, homomorfizmus, melynek képe K, magja N.

A fenti konstruckió részletes motivációja a jegyzetben!

4.7.15. Definíció

A K a G csoport N szerinti faktorcsoportja, jele G/N.
A ψ neve természetes homomorfizmus.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2'$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2'$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.

Minden elemnek van kétoldali inverze.

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1N = g_1'N$ és $M_2 = g_2N = g_2'N \implies g_1g_2N = g_1'g_2'N.$

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1g_2N = g_1g_2'N = g_1Ng_2' = g_1'Ng_2' = g_1'g_2'N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.
Minden elemnek van kétoldali inverze.
A $\psi(g) = gN$ természetes homomorfizmus tényleg homomorfizmus,

A jóldefiniáltság bizonyítása

$M_1 = g_1 N = g_1' N$ és $M_2 = g_2 N = g_2' N \implies g_1 g_2 N = g_1' g_2' N$.

Tudjuk, hogy $gN = Ng$ minden $g \in G$-re. Ezért

$$g_1 g_2 N = g_1 g_2' N = g_1 N g_2' = g_1' N g_2' = g_1' g_2' N.$$

Tehát a szorzás a K halmazon tényleg jóldefiniált.

A G/N egységeleme $N = 1 \cdot N$.

Valóban, $(1N)(gN) = (1 \cdot g)N = gN$ és hasonlóan $(gN)N = gN$.

Házi feladat (megoldás a jegyzetben)

A szorzás K-ban asszociatív.

Minden elemnek van kétoldali inverze.

A $\psi(g) = gN$ természetes homomorfizmus tényleg homomorfizmus, melynek magja tényleg N.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus,
akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G / \mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, művelettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G| / |\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletttartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, művelettartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.
Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:
$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.
Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,
és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.
Létezik az analóg faktortér

A homomorfizmustétel

4.7.16 Homomorfizmustétel

Ha G és H csoportok, és $\varphi : G \to H$ homomorfizmus, akkor $\mathrm{Im}(\varphi) \cong G/\,\mathrm{Ker}(\varphi)$.

Bizonyítás

Legyen $N = \mathrm{Ker}(\varphi)$. Ekkor a $gN \leftrightarrow \varphi(g)$ megfeleltetés jóldefiniált, műveletartó és kölcsönösen egyértelmű. $\square$

Speciálisan $|\mathrm{Im}(\varphi)| = |G|/|\mathrm{Ker}(\varphi)|$.

Ez analóg a lineáris algebra dimenziótételével:

$\dim \mathrm{Im}(A) = \dim V - \dim \mathrm{Ker}(A)$.

Hiszen ha a T alaptest véges, akkor $|V| = |T|^{\dim V}$,

és ezért $|\mathrm{Im}(A)| = |V|/|\mathrm{Ker}(A)|$.

Létezik az analóg faktortér (és a faktorgyűrű) fogalma is.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$. Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i \sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.
Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$,

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.
Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, mert $\cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) = 1$
akkor és csak akkor, ha r egész szám.

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok).
Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$.
Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$.
Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor
a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$.
Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, mert $\cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) = 1$
akkor és csak akkor, ha r egész szám. Ezért a homomorfizmustétel
miatt $K = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathbb{R}^+ / \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$. $\square$

A faktor kiszámítása homomorfizmustétellel

4.7.17. Gyakorlat

Melyik ismert csoporttal izomorf $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$?

Megoldás

Legyen K a komplex egységkör (az 1 abszolút értékű számok). Ez csoport a szorzásra. Belátjuk, hogy $\mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+ \cong K$. Legyen $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{C}^\times$, melyre $\varphi(r) = \cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r)$. Ez homomorfizmus, hiszen komplex számok szorzásakor a szögek összeadódnak. Nyilván $\mathrm{Im}(\varphi) = K$. Viszont $\mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{Z}$, mert $\cos(2\pi r) + i\sin(2\pi r) = 1$ akkor és csak akkor, ha r egész szám. Ezért a homomorfizmustétel miatt $K = \mathrm{Im}(\varphi) \cong \mathbb{R}^+ / \mathrm{Ker}(\varphi) = \mathbb{R}^+ / \mathbb{Z}^+$. □

Ennél a módszernél előre meg kell tippelni, mi a faktorcsoport.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$,

.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$,

.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, .

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\},\quad F = fN = \{f, f^3\},\quad T = tN = \{t, tf^2\},\quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \qquad T = tN$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST =?$

$$S = tfN, \qquad T = tN \implies ST = tftN =?$$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \quad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3$

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\},\quad F = fN = \{f, f^3\},\quad T = tN = \{t, tf^2\},\quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \qquad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \quad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST =?$

$S = tfN$, $\quad T = tN \implies ST = tftN =?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2, mert $F^2 = f^2N = N$,

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$$N = \{1, f^2\}, \quad F = fN = \{f, f^3\}, \quad T = tN = \{t, tf^2\}, \quad S = tfN = \{tf, tf^3\}.$$

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN, \qquad T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2, mert $F^2 = f^2N = N$, de $F \neq N$.

Példa faktorcsoportra

4.8.38. Példa

Írjuk föl a $D_4/\{1, f^2\}$ faktorcsoport szorzástábláját.

$N = \{1, f^2\}$, $F = fN = \{f, f^3\}$, $T = tN = \{t, tf^2\}$, $S = tfN = \{tf, tf^3\}$.

	N	F	T	S
N	N	F	T	S
F	F	N	S	T
T	T	S	N	F
S	S	T	F	N

Példaszorzat: $ST = ?$

$S = tfN$, $T = tN \implies ST = tftN = ?$

Mivel $ft = tf^{-1} = tf^3$, ezért $tft = ttf^3 = f^3 \in F$. Azaz $ST = F$.

Elemrend: F rendje 2, mert $F^2 = f^2N = N$, de $F \neq N$.

Viszont f rendje D_4-ben 4.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje
a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$,
és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak,
ha $(gN)^k = N$

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje
a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$,
és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak,
ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből
a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje
a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$,
és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak,
ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből
a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje
a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$,
és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak,
ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből
a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1, 15\}$ ciklikus,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. $\square$

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1, 15\}$ ciklikus, mert $3\{1, 15\}$ rendje 4.

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \triangleleft G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. □

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1,15\}$ ciklikus, mert $3\{1,15\}$ rendje 4.
$\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1,9\}$ nem ciklikus,

Elemrend a faktorcsoportban

4.7.20. Állítás

Legyen $N \lhd G$ és $g \in G$. Ekkor a $gN \in G/N$ elem rendje a legkisebb olyan pozitív n egész, melyre $g^n \in N$, és végtelen, ha nincs ilyen n. HF: $o(gN) \mid o(g)$.

Bizonyítás

$k \in \mathbb{Z}$ pontosan akkor jó kitevője a gN mellékosztálynak, ha $(gN)^k = N$ (a G/N csoport egységeleme).
De $(gN)^k = g^k N$ (a szorzásnál minden tényezőből a g elemet választva reprezentánsként).
Tehát k pontosan akkor jó kitevő, ha $g^k N = N$, azaz ha $g^k \in N$.
Mivel a rend a legkisebb pozitív jó kitevő, az állítást beláttuk. □

Példa: $\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1,15\}$ ciklikus, mert $3\{1,15\}$ rendje 4.
$\mathbb{Z}_{16}^{\times}/\{1,9\}$ nem ciklikus, minden elemrend 1 vagy 2.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$,

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy
$gNg^{-1} \subseteq N$,

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$, azaz $gN \subseteq Ng$ minden $g \in G$-re.

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$, azaz $gN \subseteq Ng$ minden $g \in G$-re.
Ezt g helyett g^{-1}-re alkalmazva $g^{-1}N \subseteq Ng^{-1}$ adódik,

A normálosztó jellemzései

4.7.9. Gyakorlat, 4.8.1. Állítás

Ha $N \leq G$, akkor a következők ekvivalensek.

(1) Az N szerinti bal mellékosztályok G-nek ugyanazok a részhalmazai, mint az N szerinti jobb mellékosztályok.

(2) $gN = Ng$ minden $g \in G$-re.

(3) Minden $g \in G$ és $a \in N$ esetén $gag^{-1} \in N$.

Bizonyításvázlat

(1) $\iff$ (2) Ha $gN = Ng'$, akkor $g \in gN = Ng'$.
De $g \in Ng$, és így $g \in Ng \cap Ng'$, azaz $gN = Ng' = Ng$.
(2) $\iff$ (3) A (3)-beli feltétel azzal ekvivalens, hogy $gNg^{-1} \subseteq N$, azaz $gN \subseteq Ng$ minden $g \in G$-re.
Ezt g helyett g^{-1}-re alkalmazva $g^{-1}N \subseteq Ng^{-1}$ adódik, ahonnan g-vel jobbról és balról szorozva $Ng \subseteq gN$.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N,

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint. Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$. Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G:N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$. $\square$

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$. $\square$

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G:N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$. $\square$

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.
Az S_3-ban $\{id, (12)\}$ három indexű,

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G : N| = 2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G - N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G - N\}$. $\square$

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.
Az S_3-ban $\{id, (12)\}$ három indexű, és nem normálosztó.

Kis indexű részcsoportok

A G csoport triviális normálosztói: $\{1\}$ és G.

4.7.19. Állítás

Kettő indexű részcsoport mindig normálosztó.

Bizonyítás

Ha $|G:N|=2$, akkor két bal oldali mellékosztály van N szerint.
Az egyik N, a másik tehát N komplementuma, azaz $G-N$.
Ugyanez azonban a jobb oldali mellékosztályokra is igaz.
Tehát a bal és a jobb mellékosztályok halmaza is $\{N, G-N\}$. □

A diédercsoportban a forgatások 2 indexű normálosztót alkotnak.
Az S_3-ban $\{id, (12)\}$ három indexű, és nem normálosztó.
Páratlan rendű csoportban viszont minden három indexű részcsoport normálosztó (4.12.42. Feladat).

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot **az x elem g-vel vett konjugáltjának** nevezzük ($x \in G$).

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel,

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül,

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák”.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák”. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz”, ha g-vel „átfestjük” a síkot.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. □

A konjugált elemek „egyformák”. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz”, ha g-vel „átfestjük” a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel,

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. □

A konjugált elemek „egyformák”. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz”, ha g-vel „átfestjük” a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel, vagy először festünk g-vel, és utána alkalmazzuk f konjugáltját:

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. □

A konjugált elemek „egyformák”. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz”, ha g-vel „átfestjük” a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel, vagy először festünk g-vel, és utána alkalmazzuk f konjugáltját: $gf(x) = (gfg^{-1})g(x)$.

A konjugálás

4.1.19. Definíció

Legyen G csoport és $g \in G$ rögzített elem. A gxg^{-1} szorzatot az x elem g-vel vett konjugáltjának nevezzük ($x \in G$).
Az a $\varphi_g : G \to G$ leképezés, amely minden x elemhez gxg^{-1}-et rendel, a g elemmel való konjugálás.

4.1.18 Gyakorlat

Ha f α szögű forgatás P körül, akkor gfg^{-1} forgatás $g(P)$ körül, mégpedig α szöggel, ha g mozgás, és $-\alpha$ szöggel egyébként. $\square$

A konjugált elemek „egyformák”. Azaz f és gfg^{-1} „ugyanaz”, ha g-vel „átfestjük” a síkot. Másképp: mindegy, hogy először alkalmazzuk f-et, és utána festünk g-vel, vagy először festünk g-vel, és utána alkalmazzuk f konjugáltját: $gf(x) = (gfg^{-1})g(x)$.
A bázistranszformáció és az izomorfizmus is átfestés.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó,
ha zárt a konjugálásra,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

4.8.14. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor konjugált,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

4.8.14. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma”,

Konjugálás és normálosztók

4.3.4. Gyakorlat (HF)

Ha $g \in G$, akkor a g-vel konjugálás (a $\varphi(x) = gxg^{-1}$ leképezés) a G csoportnak önmagára való izomorfizmusa, azaz automorfizmusa.

4.8.5. Gyakorlat (HF)

A konjugáltság ekvivalenciareláció. A kapott osztályokat a csoport konjugáltosztályainak nevezzük.

Láttuk: egy részcsoport akkor és csak akkor normálosztó, ha zárt a konjugálásra, azaz ha konjugáltosztályok egyesítése.

4.8.14. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportban két elem pontosan akkor konjugált, ha a ciklusfelbontásuk „egyforma”, azaz ugyanannyi, ugyanolyan hosszú ciklus szerepel bennük. □

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által
generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által
generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \dots, v_n \in V$ elemek által
generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \dots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \dots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \dots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \dots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által
generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által
generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által
generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a legszűkebb részcsoport, ami a g-t tartalmazza.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által
generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által
generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a legszűkebb részcsoport, ami a g-t tartalmazza. Azaz minden H részcsoportra, ha $g \in H$,

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által **generált altér** elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a **legszűkebb** altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által **generált részcsoport** elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a **legszűkebb** részcsoport, ami a g-t tartalmazza. Azaz minden H részcsoportra, ha $g \in H$, akkor $\langle g \rangle \subseteq H$.

Generált altér és ciklikus részcsoport

Emlékeztető

Ha V vektortér, akkor a $v_1, \ldots, v_n \in V$ elemek által
generált altér elemei a $\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ alakú vektorok.
Jele $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.
Ez a legszűkebb altér, ami $v_1, \ldots, v_n$-et tartalmazza. Azaz minden W altérre, ha $v_1, \ldots, v_n \in W$ akkor $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle \subseteq W$.

Emlékeztető

Ha G csoport, akkor a $g \in G$ elem által
generált részcsoport elemei a g^n alakú elemek (ahol n egész).
Jele $\langle g \rangle$.
Ez a legszűkebb részcsoport, ami a g-t tartalmazza. Azaz minden H részcsoportra, ha $g \in H$, akkor $\langle g \rangle \subseteq H$.

Mi legyen $\langle g_1, \ldots, g_n \rangle$?

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport a páros számok részcsoportja.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport a páros számok részcsoportja.
Kézenfekvő: $\langle 18, 26 \rangle =$ páros számok.

Generálás $\mathbb{Z}^+$-ban

Tegyük föl, hogy $\mathbb{Z}^+$ egy H részcsoportja tartalmazza a 18 és 26 számokat. Milyen számokat kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a kivonásra, $8 = 26 - 18 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra, $16 = 8 + 8 \in H$.
Mivel H zárt a kivonásra, $2 = 18 - 16 \in H$.
Mivel H zárt az összeadásra és a kivonásra, minden páros szám H-ban van (a pozitívak és a negatívak is).
Ezek részcsoportot alkotnak, több számot nem kell bevenni.

Vagyis a 18 és 26 számokat tartalmazó legszűkebb részcsoport a páros számok részcsoportja.
Kézenfekvő: $\langle 18, 26 \rangle =$ páros számok.

HF: Az m és n-et tartalmazó legszűkebb részcsoport az m és n legnagyobb közös osztójának többszöröseiből áll.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció,

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az *id* permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért
minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért
minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az *id* permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet. Ezért csak A_4-nél állhatunk le.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet. Ezért csak A_4-nél állhatunk le.

Vagyis az (123) és $(12)(34)$ permutációkat tartalmazó legszűkebb részcsoport az A_4 alternáló csoport.

Generálás a nemkommutatív esetben

Tegyük föl, hogy S_4 egy H részcsoportja tartalmazza az (123) és $(12)(34)$ permutációkat. Mit kell még tartalmaznia?

Mivel H zárt a szorzásra, $(134) = (123)(12)(34) \in H$.
Hasonlóan $(243) = (12)(34)(123) \in H$, továbbá
$(132) = (123)^2 \in H$, $(143) = (134)^2 \in H$, $(234) = (243)^2 \in H$.
Ez eddig összesen 8 elem az id permutációval együtt.
Addig kellene folytatni, amíg részcsoportot nem kapunk.
Gyorsítás: (123) és $(12)(34)$ páros permutáció, ezért minden szorzásnál, inverzképzésnél páros permutációt kapunk.
Lagrange tétele miatt A_4-nek legalább 8 elemű részcsoportja csak maga A_4 lehet. Ezért csak A_4-nél állhatunk le.

Vagyis az (123) és $(12)(34)$ permutációkat tartalmazó legszűkebb részcsoport az A_4 alternáló csoport.
Kézenfekvő: $\langle (123), (12)(34) \rangle = A_4$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által
generált részcsoport

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek,

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit,

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is.

Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük ha $\langle X \rangle = G$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által generált részcsoport a legszűkebb X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G generátorrendszerének nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X generálja G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által generált részcsoport a legszűkebb X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G generátorrendszerének nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X generálja G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

4.6.7. Állítás

A generált részcsoport egyértelműen létezik.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X **generálja** G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

4.6.7. Állítás

A generált részcsoport egyértelműen létezik.
Úgy kapható, mint az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.

Generált részcsoport

4.6.3. Definíció

Tetszőleges G csoport esetén az $X \subseteq G$ által **generált részcsoport** a **legszűkebb** X-et tartalmazó részcsoportja G-nek, jele $\langle X \rangle$.

Ez azt jelenti, hogy G minden olyan H részcsoportja, amely tartalmazza X elemeit, tartalmazza az $\langle X \rangle$ részcsoportot is. Az X részhalmazt G **generátorrendszerének** nevezzük (illetve azt mondjuk, hogy X **generálja** G-t), ha $\langle X \rangle = G$.

4.6.7. Állítás

A generált részcsoport egyértelműen létezik.
Úgy kapható, mint az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.

Megjegyzés: az üres halmaz által generált részcsoport az egységelemből áll.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű,

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete. Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete. Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete). Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek,

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.
Egyértelműség: Ha H_1 és H_2 is ilyen, akkor $X \subseteq H_1$ és $X \subseteq H_2$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.
Egyértelműség: Ha H_1 és H_2 is ilyen, akkor $X \subseteq H_1$ és $X \subseteq H_2$.
A feltételt $K = H_2$-re alkalmazva $X \subseteq H_2 \implies H_1 \subseteq H_2$.

A generált részcsoport létezése

Az X által generált részcsoport olyan $H \supseteq X$ részcsoportja G-nek, melyre tetszőleges $K \leq G$ esetén $X \subseteq K \iff H \subseteq K$.

4.6.7. Állítás

Ha X részhalmaza a G csoportnak, akkor az X által generált részcsoport egyértelmű, és létezik is, mint a G azon részcsoportjainak metszete, melyek X-et tartalmazzák.

Bizonyítás

Létezés: Legyen H az X-et tartalmazó részcsoportok metszete.
Ez X-et tartalmazó részcsoport (mert részcsoportok metszete).
Ha $X \subseteq K \leq G$, akkor K tényezője a H-t adó metszetnek, így $H \subseteq K$.
Egyértelműség: Ha H_1 és H_2 is ilyen, akkor $X \subseteq H_1$ és $X \subseteq H_2$.
A feltételt $K = H_2$-re alkalmazva $X \subseteq H_2 \implies H_1 \subseteq H_2$.
Szerepcserével $H_2 \subseteq H_1$. $\square$

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk") L halmazát,

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$.

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll,

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk”) L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll, melyek fölírhatók az X elemeiből és azok inverzeiből képzett akárhány tényezős szorzatként

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk") L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll, melyek fölírhatók az X elemeiből és azok inverzeiből képzett akárhány tényezős szorzatként (X minden eleme többször is felhasználható egy ilyen szorzatban).

A generált részcsoport elemei

Tudunk-e képletet adni a generált részcsoport elemeire?

4.6.1. Állítás (bizonyítás, mint vektorterekre)

Legyen A kommutatív csoport, melyben a művelet jele a $+$ és $g_1, \ldots, g_n \in A$. Tekintsük az $m_1 g_1 + \ldots + m_n g_n$ elemek („lineáris kombinációk") L halmazát, ahol m_i egész számok. Ekkor $L = \langle g_1, \ldots, g_n \rangle$.

4.6.8. Tétel (NB)

Legyen G csoport és $X \subseteq G$. Ekkor $\langle X \rangle$ a G azon elemeiből áll, melyek fölírhatók az X elemeiből és azok inverzeiből képzett akárhány tényezős szorzatként (X minden eleme többször is felhasználható egy ilyen szorzatban).

(Ide kapcsolódik a szabad csoportokól szóló 4.10.2. Tétel.)

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\dots n)$.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \ldots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \ldots f(x_k))$

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12 \ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12 \ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \ldots x_k) \circ f^{-1} = \big(f(x_1) \ldots f(x_k)\big)$ (ez konjugálás f-fel).

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\dots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\dots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \dots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k))$ (ez konjugálás f-fel).
Ezért $(12\dots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik,

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \ldots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \ldots f(x_k))$ (ez konjugálás f-fel).
Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\dots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\dots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \dots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k))$ (ez konjugálás f-fel).
Ezért $(12\dots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételve kapjuk, hogy $(34), \dots, (n-1, n) \in H$.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \ldots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \ldots f(x_k))$ (ez konjugálás f-fel).
Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételve kapjuk, hogy $(34), \ldots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\dots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\dots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \dots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k))$ (ez konjugálás f-fel).
Ezért $(12\dots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételve kapjuk, hogy $(34), \dots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció. Ha $g(n) = k$, akkor
$h = (n, n-1)(n-1, n-2) \dots (k+1, k)g$ az n-et n-be viszi.

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\dots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\dots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \dots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \dots f(x_k))$ (ez konjugálás f-fel).
Ezért $(12\dots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételve kapjuk, hogy $(34), \dots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció. Ha $g(n) = k$, akkor
$h = (n, n-1)(n-1, n-2)\dots(k+1, k)g$ az n-et n-be viszi.
Így n szerinti indukcióval érvelve $h \in H$,

A szimmetrikus csoport két elemmel generálható

4.6.11/(3). és 4.2.28. Gyakorlat

Az S_n szimmetrikus csoportot generálja (12) és $(12\ldots n)$.

Bizonyítás

Legyen H az (12) és $(12\ldots n)$ által generált részcsoport.
Láttuk (4.8.14. Gyakorlat), hogy ha $f \in S_n$, akkor
$f \circ (x_1 \ldots x_k) \circ f^{-1} = (f(x_1) \ldots f(x_k))$ (ez konjugálás f-fel).
Ezért $(12\ldots n)$-nel (12)-t konjugálva (23) adódik, azaz $(23) \in H$.
Ezt ismételve kapjuk, hogy $(34), \ldots, (n-1, n) \in H$.
Így a kérdés az (4.2.27. Gyakorlat), hogy szomszédos elemek cseréjével megkapható-e minden permutáció. Ha $g(n) = k$, akkor
$h = (n, n-1)(n-1, n-2)\ldots(k+1, k)g$ az n-et n-be viszi.
Így n szerinti indukcióval érvelve $h \in H$, ahonnan $g \in H$. □

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza,

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció).

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció). Ennek elemeit általános gyűrűben nehéz leírni (mint a csoportok esetében is),

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció). Ennek elemeit általános gyűrűben nehéz leírni (mint a csoportok esetében is), a kommutatív esetben azonban a generátorok egész együtthatós polinomjaiból áll.

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció). Ennek elemeit általános gyűrűben nehéz leírni (mint a csoportok esetében is), a kommutatív esetben azonban a generátorok egész együtthatós polinomjaiból áll.

5.1.2. Állítás (HF)

Ha R kommutatív egységelemes gyűrű és $r_1, \ldots, r_n \in R$,

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció). Ennek elemeit általános gyűrűben nehéz leírni (mint a csoportok esetében is), a kommutatív esetben azonban a generátorok egész együtthatós polinomjaiból áll.

5.1.2. Állítás (HF)

Ha R kommutatív egységelemes gyűrű és $r_1, \ldots, r_n \in R$, akkor az $r_1, \ldots, r_n$ és az egységelem által generált részgyűrű a $p(r_1, \ldots, r_n)$ alakú kifejezések halmaza,

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció). Ennek elemeit általános gyűrűben nehéz leírni (mint a csoportok esetében is), a kommutatív esetben azonban a generátorok egész együtthatós polinomjaiból áll.

5.1.2. Állítás (HF)

Ha R kommutatív egységelemes gyűrű és $r_1, \ldots, r_n \in R$, akkor az $r_1, \ldots, r_n$ és az egységelem által generált részgyűrű a $p(r_1, \ldots, r_n)$ alakú kifejezések halmaza, ahol p befutja $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ elemeit.

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció). Ennek elemeit általános gyűrűben nehéz leírni (mint a csoportok esetében is), a kommutatív esetben azonban a generátorok egész együtthatós polinomjaiból áll.

5.1.2. Állítás (HF)

Ha R kommutatív egységelemes gyűrű és $r_1, \ldots, r_n \in R$, akkor az $r_1, \ldots, r_n$ és az egységelem által generált részgyűrű a $p(r_1, \ldots, r_n)$ alakú kifejezések halmaza, ahol p befutja $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ elemeit.

Ahogy lineáris algebrában is, egy polinomba való behelyettesítéskor a konstans tagot R egységelemével kell megszorozni.

Generált részgyűrű

Ahogy csoportok esetében, egy R gyűrű X részhalmaza által generált részgyűrűje az R legszűkebb részgyűrűje, ami X-et tartalmazza, ami egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó részgyűrűk metszete (5.1.1. Definíció). Ennek elemeit általános gyűrűben nehéz leírni (mint a csoportok esetében is), a kommutatív esetben azonban a generátorok egész együtthatós polinomjaiból áll.

5.1.2. Állítás (HF)

Ha R kommutatív egységelemes gyűrű és $r_1, \ldots, r_n \in R$, akkor az $r_1, \ldots, r_n$ és az egységelem által generált részgyűrű a $p(r_1, \ldots, r_n)$ alakú kifejezések halmaza, ahol p befutja $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ elemeit.

Ahogy lineáris algebrában is, egy polinomba való behelyettesítéskor a konstans tagot R egységelemével kell megszorozni.
Mindez kapcsolatban áll a polinomfüggvény fogalmával is (lásd a 2.4.30. és a 2.6.9. Gyakorlatokat).

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által **generált** ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Ez egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó ideálok metszete.

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Ez egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó ideálok metszete.

5.1.9. Állítás (HF)

Ha R egységelemes gyűrű és $s_1, \ldots, s_n \in R$,

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Ez egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó ideálok metszete.

5.1.9. Állítás (HF)

Ha R egységelemes gyűrű és $s_1, \ldots, s_n \in R$, akkor az $s_1, \ldots, s_n$ által generált balideál az $r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$ alakú elemek halmaza,

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Ez egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó ideálok metszete.

5.1.9. Állítás (HF)

Ha R egységelemes gyűrű és $s_1, \ldots, s_n \in R$, akkor az $s_1, \ldots, s_n$ által generált balideál az $r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$ alakú elemek halmaza, ahol $r_1, \ldots, r_n$ befutja R elemeit.

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Ez egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó ideálok metszete.

5.1.9. Állítás (HF)

Ha R egységelemes gyűrű és $s_1, \ldots, s_n \in R$, akkor az $s_1, \ldots, s_n$ által generált balideál az $r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$ alakú elemek halmaza, ahol $r_1, \ldots, r_n$ befutja R elemeit. Jele: $(s_1, \ldots, s_n)$.

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Ez egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó ideálok metszete.

5.1.9. Állítás (HF)

Ha R egységelemes gyűrű és $s_1, \ldots, s_n \in R$, akkor az $s_1, \ldots, s_n$ által generált balideál az $r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$ alakú elemek halmaza, ahol $r_1, \ldots, r_n$ befutja R elemeit. Jele: $(s_1, \ldots, s_n)$.

A bizonyítás nagyon hasonló ahhoz, ahogy Abel-csoportok generált részcsoportjainak elemeit írtuk le (4.6.1. Állítás).

Generált ideál

5.1.8. Definíció

Ha X részhalmaza az R gyűrűnek, akkor R-nek az X-et tartalmazó legszűkebb ideálját az X által generált ideálnak nevezzük.
Hasonlóan: generált bal-, illetve jobbideál.

Ez egyértelműen létezik, mint az X-et tartalmazó ideálok metszete.

5.1.9. Állítás (HF)

Ha R egységelemes gyűrű és $s_1, \ldots, s_n \in R$, akkor az $s_1, \ldots, s_n$ által generált balideál az $r_1 s_1 + \ldots + r_n s_n$ alakú elemek halmaza, ahol $r_1, \ldots, r_n$ befutja R elemeit. Jele: $(s_1, \ldots, s_n)$.

A bizonyítás nagyon hasonló ahhoz, ahogy Abel-csoportok generált részcsoportjainak elemeit írtuk le (4.6.1. Állítás).
Ha R kommutatív, akkor a balidálok pontosan az ideálok, ezért az előző állítás a generált ideál elemeit adja meg.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport,

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok,

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel. Elemrend a faktorcsoportban.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel. Elemrend a faktorcsoportban.
Kettő indexű részcsoport normálosztó.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel. Elemrend a faktorcsoportban.
Kettő indexű részcsoport normálosztó.
A generált részcsoport létezik, mint metszet.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel. Elemrend a faktorcsoportban.
Kettő indexű részcsoport normálosztó.
A generált részcsoport létezik, mint metszet.
A generált részcsoport elemei Abel-csoportban és általában.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel. Elemrend a faktorcsoportban.
Kettő indexű részcsoport normálosztó.
A generált részcsoport létezik, mint metszet.
A generált részcsoport elemei Abel-csoportban és általában.
A szimmetrikus csoport két elemmel generálható.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel. Elemrend a faktorcsoportban.
Kettő indexű részcsoport normálosztó.
A generált részcsoport létezik, mint metszet.
A generált részcsoport elemei Abel-csoportban és általában.
A szimmetrikus csoport két elemmel generálható.
A generált részgyűrű elemei kommutatív, egységelemes gyűrűben.

A 13. előadás összefoglalója

Fogalmak

Normálosztó, faktorcsoport, természetes homomorfizmus.
Konjugálás, konjugáltosztályok, automorfizmus.
Generált részcsoport, részgyűrű, balideál.

Tételek

Homomorfizmusmag és normálosztó kapcsolata.
A homomorfizmus-tétel. Elemrend a faktorcsoportban.
Kettő indexű részcsoport normálosztó.
A generált részcsoport létezik, mint metszet.
A generált részcsoport elemei Abel-csoportban és általában.
A szimmetrikus csoport két elemmel generálható.
A generált részgyűrű elemei kommutatív, egységelemes gyűrűben.
A generált balideál elemei egységelemes gyűrűben.