Lineáris és absztrakt algebra, normál

ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil

Konzultáció: ewwkiss@gmail.com

https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/

11. előadás

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport,

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+$

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+$

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times$

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

(4) $\mathbb{Z}_5^+$ nem részcsoportja $\mathbb{Z}^+$-nak:

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

(4) $\mathbb{Z}_5^+$ nem részcsoportja $\mathbb{Z}^+$-nak: $6 = 2 + 4$

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

(4) $\mathbb{Z}_5^+$ nem részcsoportja $\mathbb{Z}^+$-nak: $6 = 2 + 4 \neq 2 +_5 4 = 1$.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

(4) $\mathbb{Z}_5^+$ nem részcsoportja $\mathbb{Z}^+$-nak: $6 = 2 + 4 \neq 2 +_5 4 = 1$.

(5) A páros permutációk részcsoportot alkotnak S_n-ben.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

(4) $\mathbb{Z}_5^+$ nem részcsoportja $\mathbb{Z}^+$-nak: $6 = 2 + 4 \neq 2 +_5 4 = 1$.

(5) A páros permutációk részcsoportot alkotnak S_n-ben. Neve alternáló csoport, jele A_n.

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

(4) $\mathbb{Z}_5^+$ nem részcsoportja $\mathbb{Z}^+$-nak: $6 = 2 + 4 \neq 2 +_5 4 = 1$.

(5) A páros permutációk részcsoportot alkotnak S_n-ben. Neve alternáló csoport, jele A_n.

(6) A mozgások (forgatások) részcsoport $\mathrm{O}(2)$-ben,

A részcsoport fogalma

2.2.15. Definíció

Legyen G csoport. A $H \subseteq G$ részhalmaz részcsoport, ha maga is csoport G műveleteire nézve. Jele: $H \leq G$.

Az altér fogalmához hasonlít.

Példák

(1) $\mathbb{C}^+ \geq \mathbb{R}^+ \geq \mathbb{Q}^+ \geq \mathbb{Z}^+$.

(2) $\mathbb{C}^\times \geq \mathbb{R}^\times \geq \mathbb{Q}^\times$.

(3) $\mathbb{Q}^\times$ nem részcsoportja $\mathbb{C}^+$-nak, mert más a művelet!

(4) $\mathbb{Z}_5^+$ nem részcsoportja $\mathbb{Z}^+$-nak: $6 = 2 + 4 \neq 2 +_5 4 = 1$.

(5) A páros permutációk részcsoportot alkotnak S_n-ben. Neve alternáló csoport, jele A_n.

(6) A mozgások (forgatások) részcsoport $\mathrm{O}(2)$-ben, jele $\mathrm{SO}(2)$.

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

(2) H tartalmazza G neutrális elemét.

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

(2) H tartalmazza G neutrális elemét.

(3) H zárt a G-beli inverzképzésre,

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

(2) H tartalmazza G neutrális elemét.

(3) H zárt a G-beli inverzképzésre,
azaz tetszőleges $h \in H$ esetén $h^{-1} \in H$.

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

(2) H tartalmazza G neutrális elemét.

(3) H zárt a G-beli inverzképzésre,
azaz tetszőleges $h \in H$ esetén $h^{-1} \in H$.

Állítás (4.4.27. Feladat)

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

(2) H tartalmazza G neutrális elemét.

(3) H zárt a G-beli inverzképzésre,
azaz tetszőleges $h \in H$ esetén $h^{-1} \in H$.

Állítás (4.4.27. Feladat)

(1) Részcsoportok metszete is részcsoport.

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

(2) H tartalmazza G neutrális elemét.

(3) H zárt a G-beli inverzképzésre,
azaz tetszőleges $h \in H$ esetén $h^{-1} \in H$.

Állítás (4.4.27. Feladat)

(1) Részcsoportok metszete is részcsoport.

(2) Két részcsoport uniója csak akkor részcsoport,

A részcsoport jellemzése

Tétel (2.2.16. Feladat)

Legyen G csoport, melyben a művelet jele $*$.
A $H \subseteq G$ nem üres részhalmaz pontosan akkor részcsoport, ha

(1) H zárt a szorzásra,
azaz tetszőleges $h_1, h_2 \in H$ esetén $h_1 * h_2 \in H$.

(2) H tartalmazza G neutrális elemét.

(3) H zárt a G-beli inverzképzésre,
azaz tetszőleges $h \in H$ esetén $h^{-1} \in H$.

Állítás (4.4.27. Feladat)

(1) Részcsoportok metszete is részcsoport.

(2) Két részcsoport uniója csak akkor részcsoport,
ha valamelyikük tartalmazza a másikat. $\square$

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y **komplexusszorzata**,

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Alterek összege (vektortérben) szintén komplexusösszeg.

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Alterek összege (vektortérben) szintén komplexusösszeg.

Tétel (4.4.4. Gyakorlat, HF)

Egy G csoport egy H nem üres részhalmazára ekvivalens:

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Alterek összege (vektortérben) szintén komplexusösszeg.

Tétel (4.4.4. Gyakorlat, HF)

Egy G csoport egy H nem üres részhalmazára ekvivalens:

(1) H részcsoport.

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Alterek összege (vektortérben) szintén komplexusösszeg.

Tétel (4.4.4. Gyakorlat, HF)

Egy G csoport egy H nem üres részhalmazára ekvivalens:

(1) H részcsoport.

(2) $HH = H^{-1} = H$.

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Alterek összege (vektortérben) szintén komplexusösszeg.

Tétel (4.4.4. Gyakorlat, HF)

Egy G csoport egy H nem üres részhalmazára ekvivalens:

(1) H részcsoport.

(2) $HH = H^{-1} = H$.

(3) $HH^{-1} \subseteq H$.

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Alterek összege (vektortérben) szintén komplexusösszeg.

Tétel (4.4.4. Gyakorlat, HF)

Egy G csoport egy H nem üres részhalmazára ekvivalens:

(1) H részcsoport.

(2) $HH = H^{-1} = H$.

(3) $HH^{-1} \subseteq H$.

Ha H részcsoport és $h \in H$, akkor $hH = Hh = H$.

Komplexusműveletek

4.4.2. Definíció

Ha X és Y tetszőleges részhalmazai egy G csoportnak, akkor $XY = \{xy : x \in X, y \in Y\}$ az X és Y komplexusszorzata, és $X^{-1} = \{x^{-1} : x \in X\}$ az X komplexusinverze.

Alterek összege (vektortérben) szintén komplexusösszeg.

Tétel (4.4.4. Gyakorlat, HF)

Egy G csoport egy H nem üres részhalmazára ekvivalens:

(1) H részcsoport.

(2) $HH = H^{-1} = H$.

(3) $HH^{-1} \subseteq H$.

Ha H részcsoport és $h \in H$, akkor $hH = Hh = H$.
Minden részcsoport tartalmazza a neutrális elemet.

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje,

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma
osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.
Triviális részcsoport: az egész csoport,

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.
Triviális részcsoport: az egész csoport, és az $\{1\}$ részcsoport.

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.
Triviális részcsoport: az egész csoport, és az $\{1\}$ részcsoport.

Prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van: a triviálisak.

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.
Triviális részcsoport: az egész csoport, és az $\{1\}$ részcsoport.

Prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van: a triviálisak.

Bizonyítás

Ha a G csoport elemszáma a p prím,

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.
Triviális részcsoport: az egész csoport, és az $\{1\}$ részcsoport.

Prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van: a triviálisak.

Bizonyítás

Ha a G csoport elemszáma a p prím, akkor Lagrange tétele miatt minden H részcsoport rendje csak 1 vagy p lehet.

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.
Triviális részcsoport: az egész csoport, és az $\{1\}$ részcsoport.

Prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van: a triviálisak.

Bizonyítás

Ha a G csoport elemszáma a p prím, akkor Lagrange tétele miatt minden H részcsoport rendje csak 1 vagy p lehet.
Ha $|H| = p$, akkor $H = G$.

Lagrange tétele

Lagrange tétele (4.4.11)

Véges csoport minden részcsoportjának elemszáma osztója a csoport elemszámának (bizonyítás később).

Elnevezések: A csoport elemszáma a csoport rendje, jele $|G|$.
Valódi részcsoport: nem az egész csoport.
Triviális részcsoport: az egész csoport, és az $\{1\}$ részcsoport.

Prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van: a triviálisak.

Bizonyítás

Ha a G csoport elemszáma a p prím, akkor Lagrange tétele miatt minden H részcsoport rendje csak 1 vagy p lehet.
Ha $|H| = p$, akkor $H = G$. Ha $|H| = 1$, akkor $H = \{1\}$. □

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra.

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma.

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek,

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$,

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$, ahol k ezeknek a részhalmazoknak a száma.

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$, ahol k ezeknek a részhalmazoknak a száma.

4.4.6. Definíció

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$, ahol k ezeknek a részhalmazoknak a száma.

4.4.6. Definíció

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $gH = \{gh \, : \, h \in H\}$ bal oldali H szerinti **mellékosztály**.

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$, ahol k ezeknek a részhalmazoknak a száma.

4.4.6. Definíció

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $gH = \{gh : h \in H\}$ bal oldali, $Hg = \{hg : h \in H\}$ jobb oldali H szerinti mellékosztály.

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$, ahol k ezeknek a részhalmazoknak a száma.

4.4.6. Definíció

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $gH = \{gh : h \in H\}$ bal oldali, $Hg = \{hg : h \in H\}$ jobb oldali H szerinti mellékosztály.

Példa

$G = \mathbb{C}^+$, $H = \mathbb{R}^+$.

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$, ahol k ezeknek a részhalmazoknak a száma.

4.4.6. Definíció

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $gH = \{gh : h \in H\}$ bal oldali, $Hg = \{hg : h \in H\}$ jobb oldali H szerinti mellékosztály.

Példa

$G = \mathbb{C}^+$, $H = \mathbb{R}^+$. Ekkor a H szerinti mellékosztályok az x-tengellyel (a valós tengellyel) párhuzamos egyenesek.

Mellékosztályok

A Lagrange-tétel bizonyításának vázlata

Ha $H \leq G$, akkor a G csoportot felbontjuk gH alakú halmazokra. Ezek mindegyikének elemszáma ugyanaz lesz, mint H elemszáma. Páronként diszjunktak lesznek, így $|G| = k|H|$, ahol k ezeknek a részhalmazoknak a száma.

4.4.6. Definíció

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $gH = \{gh : h \in H\}$ bal oldali, $Hg = \{hg : h \in H\}$ jobb oldali H szerinti mellékosztály.

Példa

$G = \mathbb{C}^+$, $H = \mathbb{R}^+$. Ekkor a H szerinti mellékosztályok az x-tengellyel (a valós tengellyel) párhuzamos egyenesek. Például $(2 + 3i) + H = (8 + 3i) + H$ az $y = 3$ egyenletű egyenes.

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$.

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$,

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH$

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH = bH$,

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH = bH$, mert $hH = H$. $\square$

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH = bH$, mert $hH = H$. $\square$

A $hH = H$ bizonyításában felhasználtuk az inverz létezését!

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH = bH$, mert $hH = H$. $\square$

A $hH = H$ bizonyításában felhasználtuk az inverz létezését!

4.4.13. Következmény

Ha cH-nak és dH-nak van közös eleme, akkor egyenlők.

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH = bH$, mert $hH = H$. $\square$

A $hH = H$ bizonyításában felhasználtuk az inverz létezését!

4.4.13. Következmény

Ha cH-nak és dH-nak van közös eleme, akkor egyenlők.

Bizonyítás

Ha $a \in cH \cap dH$,

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH = bH$, mert $hH = H$. □

A $hH = H$ bizonyításában felhasználtuk az inverz létezését!

4.4.13. Következmény

Ha cH-nak és dH-nak van közös eleme, akkor egyenlők.

Bizonyítás

Ha $a \in cH \cap dH$, akkor az előző miatt $cH = aH$

A mellékosztályok diszjunktak

Lemma (4.4.14. Gyakorlat)

Legyen $H \leq G$ és $a, b \in G$. Ha $a \in bH$, akkor $aH = bH$.

Bizonyítás

Mivel $a \in bH$, ezért $a = bh$ alkalmas $h \in H$ elemre.
Ekkor $aH = bhH = bH$, mert $hH = H$. □

A $hH = H$ bizonyításában felhasználtuk az inverz létezését!

4.4.13. Következmény

Ha cH-nak és dH-nak van közös eleme, akkor egyenlők.

Bizonyítás

Ha $a \in cH \cap dH$, akkor az előző miatt $cH = aH = dH$. □

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt). Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G,

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk,

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk, ezek páronként diszjunktak.

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk,
ezek páronként diszjunktak. Ha számuk k, akkor $|G| = k|H|$. $\square$

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk, ezek páronként diszjunktak. Ha számuk k, akkor $|G| = k|H|$. □

4.4.12. Definíció

Ha $H \leq G$, akkor a különböző H szerinti bal mellékosztályok számát a H részcsoport G-beli **indexének** hívjuk,

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk, ezek páronként diszjunktak. Ha számuk k, akkor $|G| = k|H|$. $\square$

4.4.12. Definíció

Ha $H \leq G$, akkor a különböző H szerinti bal mellékosztályok számát a H részcsoport G-beli **indexének** hívjuk, jele $|G : H|$.

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk, ezek páronként diszjunktak. Ha számuk k, akkor $|G| = k|H|$. □

4.4.12. Definíció

Ha $H \leq G$, akkor a különböző H szerinti bal mellékosztályok számát a H részcsoport G-beli **indexének** hívjuk, jele $|G : H|$.

Tehát véges csoportban $|G| = |H||G : H|$.

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk, ezek páronként diszjunktak. Ha számuk k, akkor $|G| = k|H|$. □

4.4.12. Definíció

Ha $H \leq G$, akkor a különböző H szerinti bal mellékosztályok számát a H részcsoport G-beli **indexének** hívjuk, jele $|G : H|$.

Tehát véges csoportban $|G| = |H||G : H|$.
A bal és jobb mellékosztályok száma megegyezik,

Részcsoport indexe

A Lagrange-tétel bizonyítása

Ha $H \leq G$ és $g \in G$, akkor $h \mapsto gh$ kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés H és gH között (az egyszerűsítési szabály miatt).
Ezért minden mellékosztály elemszáma $|H|$.
A mellékosztályok egyesítése az egész G, mert $g \in gH$.
Az egyenlő mellékosztályok közül csak egyet vegyünk, ezek páronként diszjunktak. Ha számuk k, akkor $|G| = k|H|$. $\square$

4.4.12. Definíció

Ha $H \leq G$, akkor a különböző H szerinti bal mellékosztályok számát a H részcsoport G-beli **indexének** hívjuk, jele $|G : H|$.

Tehát véges csoportban $|G| = |H||G : H|$.
A bal és jobb mellékosztályok száma megegyezik, mert $(gH) \leftrightarrow (gH)^{-1} = Hg^{-1}$ bijektív megfeleltetés (4.4.18. Feladat).

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport,

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének,

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

A második állítás igaz, mert $o(g) \,\Big|\, |G|$

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

A második állítás igaz, mert $o(g) \,\big|\, |G|$ miatt $|G|$ jó kitevője g-nek.

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

A második állítás igaz, mert $o(g) \,\Big|\, |G|$ miatt $|G|$ jó kitevője g-nek.

4.4.21. Következmény

Ebből következik a számelméletben tanult Euler–Fermat-tétel.

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

A második állítás igaz, mert $o(g) \mid |G|$ miatt $|G|$ jó kitevője g-nek.

4.4.21. Következmény

Ebből következik a számelméletben tanult Euler–Fermat-tétel.
$G = \mathbb{Z}_n^{\times}$,

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

A második állítás igaz, mert $o(g) \,\Big|\, |G|$ miatt $|G|$ jó kitevője g-nek.

4.4.21. Következmény

Ebből következik a számelméletben tanult Euler–Fermat-tétel.
$G = \mathbb{Z}_n^\times$, ekkor $|G| = \varphi(n)$,

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

A második állítás igaz, mert $o(g) \,\big|\, |G|$ miatt $|G|$ jó kitevője g-nek.

4.4.21. Következmény

Ebből következik a számelméletben tanult Euler–Fermat-tétel.
$G = \mathbb{Z}_n^\times$, ekkor $|G| = \varphi(n)$, így ha $(g, n) = 1$,

Egy elem által generált részcsoport

Állítás (4.3.14. Gyakorlat)

Ha G csoport és $g \in G$, akkor a g elem egész kitevőjű hatványai részcsoportot alkotnak G-ben (HF).
Ez a g által generált részcsoport, jele $\langle g \rangle$.
A $\langle g \rangle$ részcsoport rendje ugyanaz, mint a g elem rendje.

4.4.21. Következmény

Minden elem rendje osztója a csoport rendjének, így $g^{|G|} = 1$.

A második állítás igaz, mert $o(g) \,\Big|\, |G|$ miatt $|G|$ jó kitevője g-nek.

4.4.21. Következmény

Ebből következik a számelméletben tanult Euler–Fermat-tétel.
$G = \mathbb{Z}_n^\times$, ekkor $|G| = \varphi(n)$, így ha $(g, n) = 1$, akkor $g^{\varphi(n)} \equiv 1 \ (n)$.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport),

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van. Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van. Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van. Ekkor $|G| > 1$,

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$,

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$,

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$, mert itt a páros számok részcsoport.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$, mert itt a páros számok részcsoport.
Ha $o(g) = n (\neq 1)$

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű.
Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$, mert itt a páros számok részcsoport.
Ha $o(g) = n(\neq 1)$ és p prímosztója n-nek,

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$, mert itt a páros számok részcsoport.
Ha $o(g) = n(\neq 1)$ és p prímosztója n-nek, akkor

$h = g^{n/p}$ rendje p.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$, mert itt a páros számok részcsoport.
Ha $o(g) = n(\neq 1)$ és p prímosztója n-nek, akkor
a hatvány rendjének képlete miatt $h = g^{n/p}$ rendje p.

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű. Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$, mert itt a páros számok részcsoport.
Ha $o(g) = n(\neq 1)$ és p prímosztója n-nek, akkor
a hatvány rendjének képlete miatt $h = g^{n/p}$ rendje p.
Így $1 \neq h$ is generálja G-t,

Csoportok kevés részcsoporttal

4.4.23. Tétel

Egy G csoportnak akkor és csak akkor van pontosan két részcsoportja (a két triviális részcsoport), ha G prímrendű.
Ilyenkor G ciklikus csoport (és így kommutatív).

Bizonyítás

Láttuk, hogy prímrendű csoportnak csak két részcsoportja van.
Tegyük föl, hogy G-nek pontosan két részcsoportja van.
Ekkor $|G| > 1$, és így G-nek létezik 1-től különböző eleme.
Minden ilyen g-re a feltétel miatt $\langle g \rangle = G$, azaz G ciklikus.
Nem lehet $G \cong \mathbb{Z}^+$, mert itt a páros számok részcsoport.
Ha $o(g) = n(\neq 1)$ és p prímosztója n-nek, akkor
a hatvány rendjének képlete miatt $h = g^{n/p}$ rendje p.
Így $1 \neq h$ is generálja G-t, azaz G prímrendű és ciklikus. $\square$

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$,

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq}$

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q}$

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$,

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$, hiszen $g^k, g^m \in H$.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$, hiszen $g^k, g^m \in H$.
Mivel m minimális pozitív volt, csak $r = 0$ lehetséges.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$, hiszen $g^k, g^m \in H$.
Mivel m minimális pozitív volt, csak $r = 0$ lehetséges.
Ezért $g^k = (g^m)^q$,

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$, hiszen $g^k, g^m \in H$.
Mivel m minimális pozitív volt, csak $r = 0$ lehetséges.
Ezért $g^k = (g^m)^q$, vagyis g^k hatványa g^m-nek.

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$, hiszen $g^k, g^m \in H$.
Mivel m minimális pozitív volt, csak $r = 0$ lehetséges.
Ezért $g^k = (g^m)^q$, vagyis g^k hatványa g^m-nek. Így $H \subseteq \langle g^m \rangle$. $\square$

Ciklikus részcsoportja ciklikus

4.3.26. Lemma

Ciklikus csoport minden részcsoportja ciklikus.

Bizonyítás

Legyen $G = \langle g \rangle$ és $H \leq G$. Ha $H = \{1\}$, akkor ciklikus.
Ha nem, akkor van olyan $k \neq 0$, hogy $g^k \in H$.
Ekkor $g^{-k} = (g^k)^{-1} \in H$, azaz van ilyen pozitív k is.
Legyen m a legkisebb pozitív egész, melyre $g^m \in H$.
Megmutatjuk, hogy ekkor $\langle g^m \rangle = H$. Nyilván $\langle g^m \rangle \subseteq H$.
Ha $g^k \in H$, akkor $k = mq + r$ ahol $0 \leq r < m$.
Ekkor $g^r = g^{k-mq} = g^k (g^m)^{-q} \in H$, hiszen $g^k, g^m \in H$.
Mivel m minimális pozitív volt, csak $r = 0$ lehetséges.
Ezért $g^k = (g^m)^q$, vagyis g^k hatványa g^m-nek. Így $H \subseteq \langle g^m \rangle$. □

Így $\mathbb{Z}^+$ részcsoportjai az m-mel osztható számok minden m-re.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik.
Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g\rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik.
Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik.
Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.
Az n/d számnak $0, 1, \ldots, n-1$ között csak d többszöröse van,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.
Az n/d számnak $0, 1, \ldots, n-1$ között csak d többszöröse van, ezért H csakis a $g^{n/d}$ elem d darab hatványából állhat.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.
Az n/d számnak $0, 1, \ldots, n-1$ között csak d többszöröse van, ezért H csakis a $g^{n/d}$ elem d darab hatványából állhat.
Ha $h \in G$ rendje d,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.
Az n/d számnak $0, 1, \ldots, n-1$ között csak d többszöröse van, ezért H csakis a $g^{n/d}$ elem d darab hatványából állhat.
Ha $h \in G$ rendje d, akkor $\langle h \rangle$ rendje d,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.
Az n/d számnak $0, 1, \ldots, n-1$ között csak d többszöröse van, ezért H csakis a $g^{n/d}$ elem d darab hatványából állhat.
Ha $h \in G$ rendje d, akkor $\langle h \rangle$ rendje d, ezért $\langle h \rangle = H$,

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g\rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.
Az n/d számnak $0, 1, \ldots, n-1$ között csak d többszöröse van, ezért H csakis a $g^{n/d}$ elem d darab hatványából állhat.
Ha $h \in G$ rendje d, akkor $\langle h\rangle$ rendje d, ezért $\langle h\rangle = H$, azaz $h \in H$.

A ciklikus csoportok részcsoportjai

4.3.24. és 4.3.27. Állítás

Ha G egy n rendű (véges) ciklikus csoport, akkor n minden pozitív d osztójához pontosan egy d rendű részcsoport létezik. Ez $g^{n/d}$ hatványaiból áll, ahol $\langle g \rangle = G$.
G bármely két d rendű eleme egymás hatványa, számuk $\varphi(d)$.

Bizonyítás

Ha H egy d rendű részcsoport, akkor legyen $g^k \in H$.
Lagrange tétele miatt $(g^k)^d = 1$, azaz $n \mid kd$, így $(n/d) \mid k$.
Az n/d számnak $0, 1, \ldots, n-1$ között csak d többszöröse van, ezért H csakis a $g^{n/d}$ elem d darab hatványából állhat.
Ha $h \in G$ rendje d, akkor $\langle h \rangle$ rendje d, ezért $\langle h \rangle = H$, azaz $h \in H$.
Így H generátorelemei pontosan G-nek a d rendű elemei. $\square$

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak,

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk. Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek az első előadáson).

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek az első előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek az első előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek az első előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.
Egy téglalapnak, ami nem négyzet, úgyszintén (4.5.27).

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek az első előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.
Egy téglalapnak, ami nem négyzet, úgyszintén (4.5.27).
Egy kockának 48 szimmetriája van.

Permutációcsoportok

4.5.1 Definíció

Legyen X halmaz, ennek elemeit néha pontoknak hívjuk.
Az S_X szimmetrikus csoport részcsoportjait transzformációcsoportoknak, illetve véges X esetén permutációcsoportoknak nevezzük.

Ezek sokszor úgy keletkeznek, hogy egy alakzat összes szimmetriáit vesszük (példák szerepeltek az első előadáson).

Példák

A szabályos n-szögnek $2n$ szimmetriája van (4.1.23).
Egy rombusznak, ami nem négyzet, 4 szimmetriája van.
Egy téglalapnak, ami nem négyzet, úgyszintén (4.5.27).
Egy kockának 48 szimmetriája van.

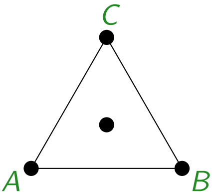
Hogyan lehet ezeket megszámolni?

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.

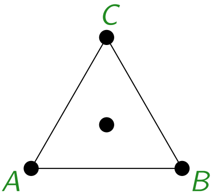
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.



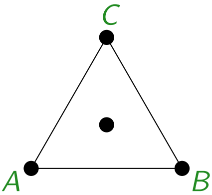
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei:



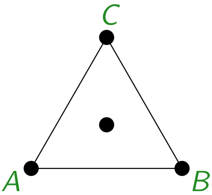
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás,



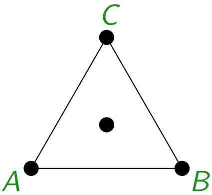
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.



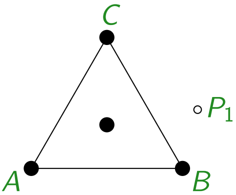
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



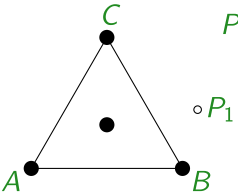
Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



Példa pályára és stabilizátorra

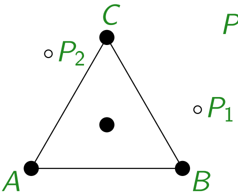
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

Példa pályára és stabilizátorra

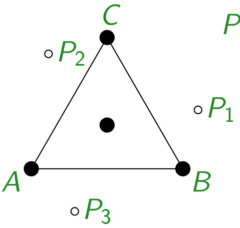
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 **pályája**: ahová G elemei el tudják vinni

Példa pályára és stabilizátorra

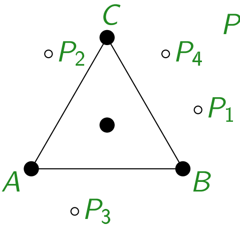
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

Példa pályára és stabilizátorra

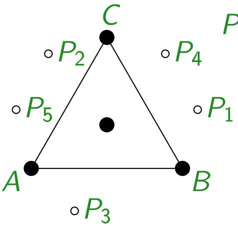
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

Példa pályára és stabilizátorra

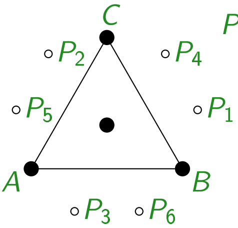
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 **pályája**: ahová G elemei el tudják vinni

Példa pályára és stabilizátorra

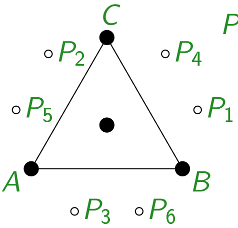
X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.

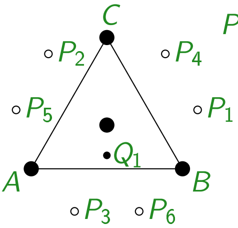


P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.

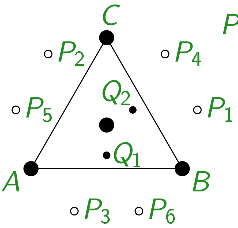


P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.

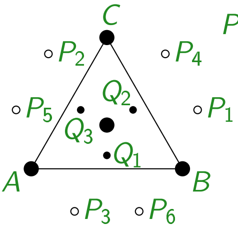


P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.

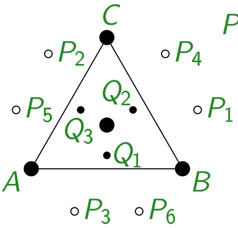


P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



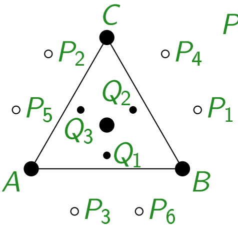
P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



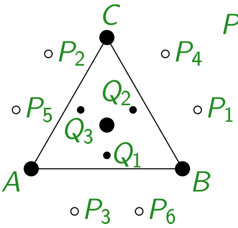
P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

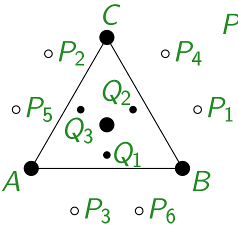
P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

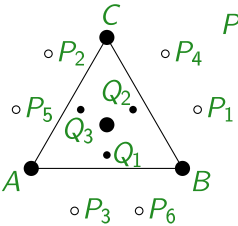
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

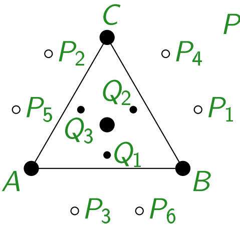
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

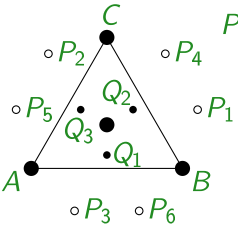
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

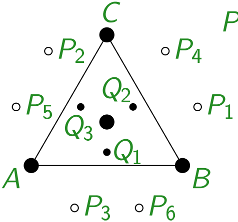
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni
P_1 pályája hatelemű

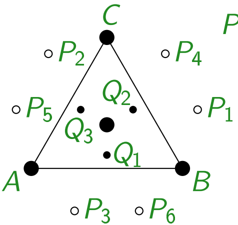
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

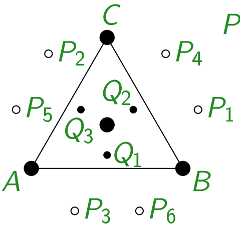
Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen (mindegyik).

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

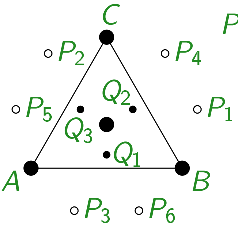
A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen (mindegyik).

(Pálya elemszáma)

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

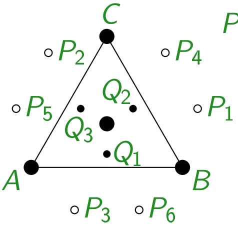
A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen (mindegyik).

(Pálya elemszáma) $\times$ (fixáló trafók száma) $=$

Példa pályára és stabilizátorra

X a sík, G az ABC szabályos háromszög szimmetriacsoportja.
A $G = D_3$ diédercsoport elemei: 3 forgatás, 3 tükrözés.
Alkalmazzuk egy rögzített pontra a G csoport összes elemét.



P_1 pályája: ahová G elemei el tudják vinni

P_1 pályája hatelemű

Q_1 pályája háromelemű,
mert AB felező merőlegesén van

A középpont pályája egyelemű

P_1-et 1 transzformáció hagyja fixen (csak az identitás).
Q_1-et 2 transzformáció hagyja fixen (egy tükrözés is).
A középpontot 6 transzformáció hagyja fixen (mindegyik).

(Pálya elemszáma) $\times$ (fixáló trafók száma) $=$ csoport rendje

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x **pályájának** (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x **pályájának** (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya **hosszának** hívjuk.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

4.5.8. Tétel

Egy pont pályájának a hossza a stabilizátorának az indexe.

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

4.5.8. Tétel

Egy pont pályájának a hossza a stabilizátorának az indexe. Képletben: $|G(x)| = |G : G_x|$,

A pálya és stabilizátor elemszámának összefüggése

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport és $x \in X$.

4.5.5. Definíció

A $g(x)$ alakú pontok halmazát, ahol g befutja G elemeit, az x pályájának (orbitjának) nevezzük, és $G(x)$-szel jelöljük. A pálya elemszámát a pálya hosszának hívjuk.

4.5.2. Definíció

Tekintsük azokat a $g \in G$ elemeket, melyek x-et fixen hagyják, azaz $g(x) = x$. Ezek nyilván részcsoportot alkotnak G-ben, melynek neve az x pont G-beli stabilizátora, jele G_x.

4.5.8. Tétel

Egy pont pályájának a hossza a stabilizátorának az indexe. Képletben: $|G(x)| = |G : G_x|$, és így $|G(x)| \cdot |G_x| = |G|$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x$

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x$

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén

$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. $\square$

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. $\square$

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük:

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. $\square$

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. $\square$

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G \,:\, f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. $\square$

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α szürjektív: Ha $g \in G$ és $y = g(x) \in G(x)$, akkor $gG_x = \alpha(y)$.

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. $\square$

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G \ : \ f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α szürjektív: Ha $g \in G$ és $y = g(x) \in G(x)$, akkor $gG_x = \alpha(y)$.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. $\square$

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α szürjektív: Ha $g \in G$ és $y = g(x) \in G(x)$, akkor $gG_x = \alpha(y)$.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$, mert
ha g közös elemük lenne,

A stabilizátor szerinti mellékosztály jelentése

4.5.3. Lemma

Legyen $G \leq S_X$, $g \in G$, $x \in X$ és $y = g(x)$. Ekkor azok az $f \in G$ elemek, melyekre $f(x) = y$, a gG_x mellékosztályt alkotják.

Bizonyítás

Mivel $g(x) = y$, ezért tetszőleges $f \in G$ esetén
$f(x) = y \iff g^{-1}f(x) = x \iff g^{-1}f \in G_x \iff f \in gG_x$. □

A pálya-stabilizátor tétel bizonyítása

$\forall y \in G(x)$-hez hozzárendeljük: $\alpha(y) = \{f \in G : f(x) = y\}$.
A Lemma szerint ez a halmaz egy G_x szerinti bal mellékosztály.
α szürjektív: Ha $g \in G$ és $y = g(x) \in G(x)$, akkor $gG_x = \alpha(y)$.
α injektív: Ha $y_1 \neq y_2$, akkor $\alpha(y_1) \neq \alpha(y_2)$, mert
ha g közös elemük lenne, akkor $y_1 = g(x) = y_2$ teljesülne. □

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak, és egyesítésük az egész X.

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor
G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak, és egyesítésük az egész X.
Elnevezés: G tranzitív,

A pályák diszjunktak

Legyen X a sík.

Ha G az O pont körüli forgatások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy O körüli körvonal (kivéve O pályája $\{O\}$).

Ha G az x-tengellyel párhuzamos eltolások csoportja, akkor minden $P \in X$ pályája egy x-tengellyel párhuzamos egyenes.

Mindkét esetben a pályák páronként diszjunkt halmazokra osztják fel a síkot, azaz a sík egy partícióját alkotják.

4.5.6. Állítás

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport. Ekkor G összes pályái az X halmaz egy partícióját alkotják, vagyis a pályák páronként diszjunktak, és egyesítésük az egész X.

Elnevezés: G tranzitív, ha az egész X egyetlen pálya.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük,

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R **reflexív**, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x \; R \; y$, akkor $y \; R \; x$.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel, HF

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x \; R \; y$, akkor $y \; R \; x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x \; R \; y$ és $y \; R \; z$, akkor $x \; R \; z$.

4.4.9. Tétel, HF

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a \; R \; x$,

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R **reflexív**, azaz $x \, R \, x$ minden x-re.

(2) R **szimmetrikus**, azaz ha $x \, R \, y$, akkor $y \, R \, x$.

(3) R **tranzitív**, azaz ha $x \, R \, y$ és $y \, R \, z$, akkor $x \, R \, z$.

4.4.9. Tétel, HF

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a \, R \, x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják. $\square$

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x\ R\ x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x\ R\ y$, akkor $y\ R\ x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x\ R\ y$ és $y\ R\ z$, akkor $x\ R\ z$.

4.4.9. Tétel, HF

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a\ R\ x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják. □

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők;

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R **reflexív**, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

(2) R **szimmetrikus**, azaz ha $x \; R \; y$, akkor $y \; R \; x$.

(3) R **tranzitív**, azaz ha $x \; R \; y$ és $y \; R \; z$, akkor $x \; R \; z$.

4.4.9. Tétel, HF

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a \; R \; x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják. □

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők; az állítást úgy kell érteni, hogy bármely kettő

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R reflexív, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

(2) R szimmetrikus, azaz ha $x \; R \; y$, akkor $y \; R \; x$.

(3) R tranzitív, azaz ha $x \; R \; y$ és $y \; R \; z$, akkor $x \; R \; z$.

4.4.9. Tétel, HF

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a \; R \; x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják. $\square$

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők; az állítást úgy kell érteni, hogy bármely kettő vagy egyenlő,

Ekvivalenciareláció

4.4.8. Definíció, E.1. Függelék

Az R relációt **ekvivalenciarelációnak** nevezzük, ha bármely $x, y, z \in X$ esetén teljesül az alábbi három tulajdonság.

(1) R **reflexív**, azaz $x \; R \; x$ minden x-re.

(2) R **szimmetrikus**, azaz ha $x \; R \; y$, akkor $y \; R \; x$.

(3) R **tranzitív**, azaz ha $x \; R \; y$ és $y \; R \; z$, akkor $x \; R \; z$.

4.4.9. Tétel, HF

Ha R ekvivalenciareláció az X halmazon és $a \in X$ esetén R_a azoknak az X-beli x elemeknek a halmaza, melyekre $a \; R \; x$, akkor az R_a halmazok az X egy partícióját adják. $\square$

Az R_a halmazok között lehetnek egyenlők; az állítást úgy kell érteni, hogy bármely kettő vagy egyenlő, vagy diszjunkt.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van:

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a \; R \; b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \; (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a \; R \; b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x\ R\ y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m \; R \; n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n \ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a \; R \; b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x \; R \; y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.
Ekkor R_x az $x \in X$ pályája,

Példák ekvivalenciarelációra

Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x\ R\ y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.
Ekkor R_x az $x \in X$ pályája, így a pályák partíciót alkotnak. $\square$

Példák ekvivalenciarelációra

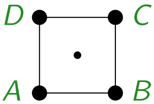
Az egész számok halmazán a kongruenciák.
Pl. $m\ R\ n$ akkor és csak akkor, ha $m \equiv n\ (3)$ (azaz $3 \mid m - n$).
Ekkor három osztály van: a modulo 3 maradékosztályok.
Például R_6 a hárommal osztható számok halmaza.

Az előző általánosításaként legyen H részcsoport G-ben.
$a\ R\ b$ akkor és csak akkor, ha $ab^{-1} \in H$.
Ekkor b osztálya $R_b = bH$ (bal oldali mellékosztály).
Lagrange tételét így is bizonyíthattuk volna!

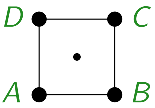
Legyen $G \leq S_X$ transzformációcsoport.
$x\ R\ y$ akkor és csak akkor, ha $g(x) = y$ alkalmas $g \in G$-re.
Ekkor R_x az $x \in X$ pályája, így a pályák partíciót alkotnak. $\square$

Mindhárom esetben ellenőrizni kell, hogy R ekvivalenciareláció!

A négyzet szimmetriáinak a száma

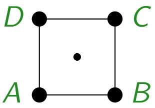


A négyzet szimmetriáinak a száma



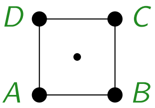
$ABCD$ egy négyzet,

A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

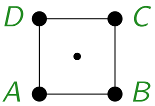
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.

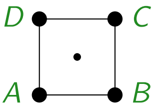
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív:

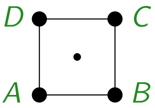
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.

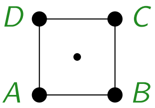
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű:

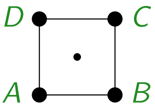
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.

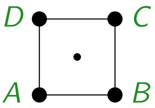
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora.

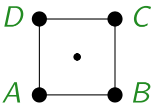
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.

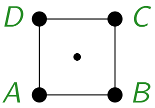
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?

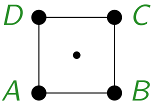
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.

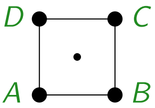
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$,

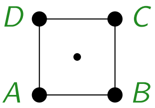
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.

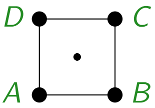
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$.

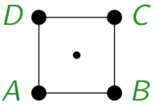
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.

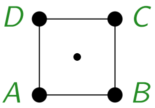
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$,

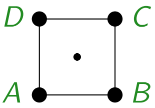
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.

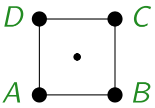
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű,

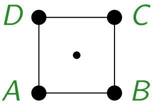
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t G-ben csak id fixálja.

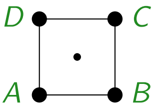
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t G-ben csak id fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$.

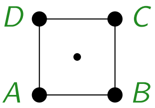
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t G-ben csak id fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$. Tehát $|G| = 4|H|$

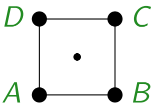
A négyzet szimmetriáinak a száma



$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t G-ben csak id fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$. Tehát $|G| = 4|H| = 4 \cdot 2$

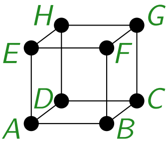
A négyzet szimmetriáinak a száma



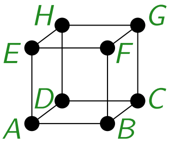
$ABCD$ egy négyzet,
G a szimmetriacsoportja.

A G elemei a négyzet csúcsait permutálják.
A G tranzitív: bármely csúcs bármely másikba átforgatható.
Ezért az A csúcs pályája négyelemű: $\{A, B, C, D\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 4|H|$.
Mely csúcsokba viheti egy $h \in H$ elem a B csúcsot?
Mivel h távolságtartó, AB hossza egyenlő $h(A)h(B)$ hosszával.
De $h(A) = A$, ezért $h(B)$ nem lehet C.
Ha $h = id$ akkor $h(B) = B$. Ha h az AC-re tükrözés: $h(B) = D$.
Ezért H-nál a B pályája $\{B, D\}$, azaz kételemű.
A H_B stabilizátor egyelemű, mert A, B-t G-ben csak id fixálja.
Így $|H| = 2|H_B| = 2$. Tehát $|G| = 4|H| = 4 \cdot 2 = 8$.

A kocka szimmetriáinak a száma

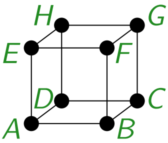


A kocka szimmetriáinak a száma



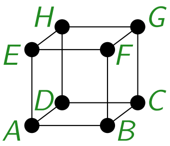
$ABCDEFGH$ egy kocka,

A kocka szimmetriáinak a száma



$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

A kocka szimmetriáinak a száma

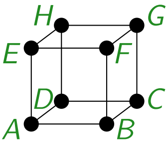


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető *B*-be

A kocka szimmetriáinak a száma

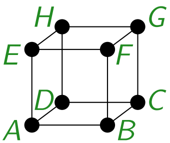


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.

A kocka szimmetriáinak a száma

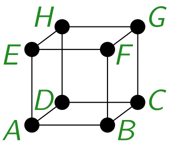


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába,

A kocka szimmetriáinak a száma

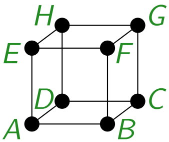


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.

A kocka szimmetriáinak a száma

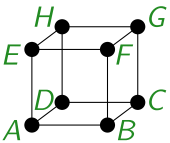


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű:

A kocka szimmetriáinak a száma

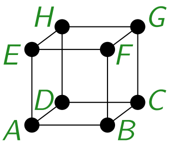


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.

A kocka szimmetriáinak a száma

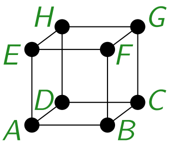


ABCDEFGH egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora.

A kocka szimmetriáinak a száma

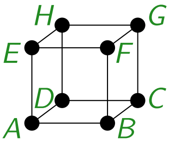


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.

A kocka szimmetriáinak a száma

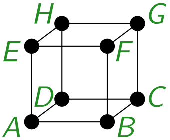


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó

A kocka szimmetriáinak a száma

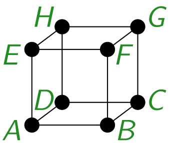


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$,

A kocka szimmetriáinak a száma

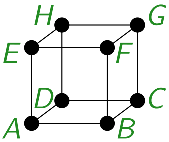


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \le G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.

A kocka szimmetriáinak a száma

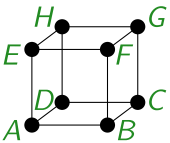


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással

A kocka szimmetriáinak a száma

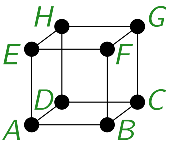


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).

A kocka szimmetriáinak a száma

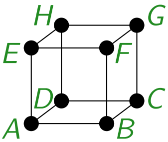


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű,

A kocka szimmetriáinak a száma

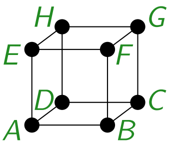


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.

A kocka szimmetriáinak a száma

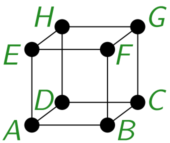


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$,

A kocka szimmetriáinak a száma

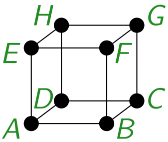


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással $(\pm 120^\circ)$.
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű

A kocka szimmetriáinak a száma

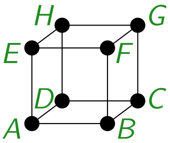


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).

A kocka szimmetriáinak a száma

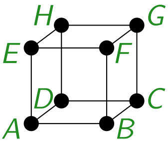


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).

A kocka szimmetriáinak a száma

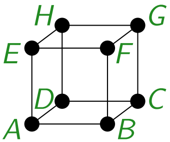


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H|$

A kocka szimmetriáinak a száma

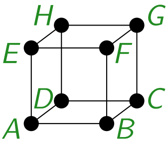


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L|$

A kocka szimmetriáinak a száma

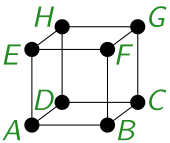


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2|L_C|$

A kocka szimmetriáinak a száma

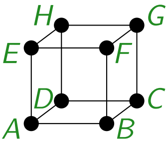


$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2|L_C| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$

A kocka szimmetriáinak a száma



$ABCDEFGH$ egy kocka,
G a szimmetriacsoportja.

4.5.9. Állítás

A átvihető B-be az AB felező merőleges síkjára tükrözéssel.
Hasonlóan minden csúcs a szomszédjába, ezért G tranzitív.
Így az A csúcs pályája nyolcelemű: $\{A, B, C, D, E, F, G, H\}$.
Legyen $H = G_A \leq G$ az A csúcs stabilizátora. Ekkor $|G| = 8|H|$.
Minden $h \in H$ távolságtartó és $h(A) = A$, így $h(B) \in \{B, D, E\}$.
Ezeket meg is kapjuk AG körüli forgatással ($\pm 120°$).
Ezért H-nál a B pályája háromelemű, és így $|H| = 3|H_B|$.
Legyen $L = H_B$, ennél C pályája a kételemű $\{C, F\}$ (HF).
Végül L-ben C stabilizátora már egyelemű lesz (HF).
Így $|G| = 8|H| = 8 \cdot 3|L| = 8 \cdot 3 \cdot 2|L_C| = 8 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 48$.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport,

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van,

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van,

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.
Az átlag: $\dfrac{4+8\cdot 1+3\cdot 0}{12} = 1$.

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.
Az átlag: $\dfrac{4 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{12} = 1$.

Olyan leszámlálási feladatoknál hasznos, ahol bizonyos megoldásokat „nem tekintünk különbözőnek.”

Burnside-(Cauchy-Frobenius-)lemma

4.5.30. Feladat

Ha $G \leq S_X$ permutációcsoport, akkor G pályáinak száma éppen a G elemei fixpontjainak átlagos száma.

Példa

Legyen $G = A_4$. Ez tranzitív, a pályák száma 1.
Az egységelemnek 4 fixpontja van.
A hármasciklusoknak 1 fixpontja van, 8 darab hármasciklus.
Az $(ab)(cd)$ alakú permutációknak 0 fixpontja van, 3 darab.
Az átlag: $\dfrac{4 + 8 \cdot 1 + 3 \cdot 0}{12} = 1$.

Olyan leszámlálási feladatoknál hasznos, ahol bizonyos megoldásokat „nem tekintünk különbözőnek.”
Ezek valamilyen szimmetriával vihetők egymásba.

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt?

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt?
És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló (ciklikus) csoport,

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló (ciklikus) csoport, ez permutálja a 36 megoldást.

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló (ciklikus) csoport, ez permutálja a 36 megoldást. Két megoldás akkor vihető forgatással egymásba, ha egy pályán vannak.

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló (ciklikus) csoport, ez permutálja a 36 megoldást. Két megoldás akkor vihető forgatással egymásba, ha egy pályán vannak. Ezért a második kérdés a pályák száma!

Egy leszámlálási feladat

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt? És ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük? És ha a tükrözéssel egymásba vihetőket is?

Mivel $3 \cdot 3$ mező van, az első kérdésre a válasz $\binom{9}{2} = 36$.

Legyen G a négy forgatásból álló (ciklikus) csoport, ez permutálja a 36 megoldást. Két megoldás akkor vihető forgatással egymásba, ha egy pályán vannak. Ezért a második kérdés a pályák száma!

A feladat harmadik kérdésénél a csoport a négyzet szimmetriacsoportja, azaz a D_4 diédercsoport.

A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.

A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.

A feladat megoldása

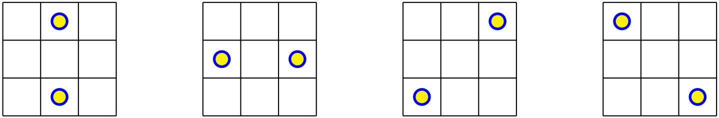
A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai.

A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

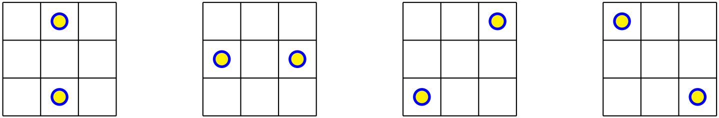
Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A 180°-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai.



A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

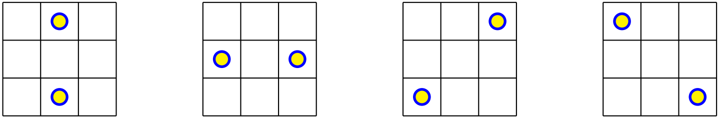
Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A $180°$-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.



A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

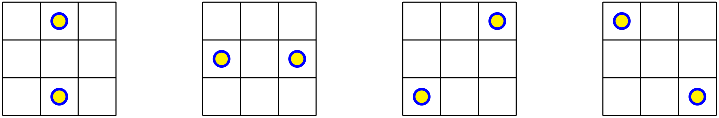
Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A $180°$-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.
Egyik $90°$-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között



A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

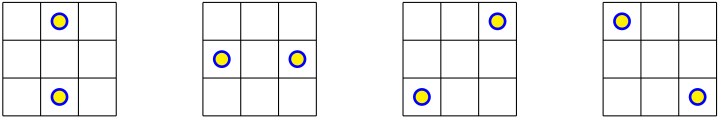
Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A $180°$-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.
Egyik $90°$-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között (ehhez 1, vagy legalább 4 mezőt kellene választani a feladatban).



A feladat megoldása

A 3×3-as sakktáblán hányféleképp választhatunk két mezőt, ha a forgatással egymásba vihető megoldásokat azonosnak vesszük?

Ki kell számolnunk a fixpontok átlagos számát.
Az identitásnak nyilván 36 fixpontja van.
A $180°$-os forgatásnak a középpontra tükrös megoldások a fixpontjai. Ezek száma $(9-1)/2 = 4$.
Egyik $90°$-os forgatásnak sincs fixpontja a 36 között
(ehhez 1, vagy legalább 4 mezőt kellene választani a feladatban).
Így a pályák száma $(36 + 4 + 2 \cdot 0)/4 = 10$.



A forgatás és tükrözés esete

Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van.

A forgatás és tükrözés esete

Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van. Az identitás, illetve a forgatások fixpontjainak száma ugyanaz, mint az előző esetben.

A forgatás és tükrözés esete

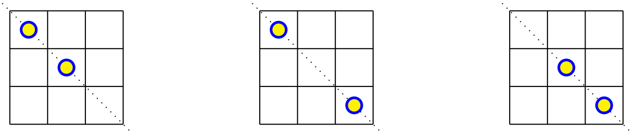
Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van.
Az identitás, illetve a forgatások fixpontjainak száma ugyanaz, mint az előző esetben.
Mind a négy tengelyes tükrözés esetében hat fixpont van,

A forgatás és tükrözés esete

Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van.
Az identitás, illetve a forgatások fixpontjainak száma ugyanaz, mint az előző esetben.
Mind a négy tengelyes tükrözés esetében hat fixpont van, ebből három olyan, ahol a kiválasztott mezők a tengelyen vannak.

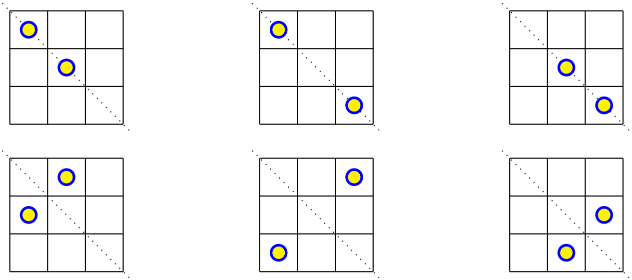
A forgatás és tükrözés esete

Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van.
Az identitás, illetve a forgatások fixpontjainak száma ugyanaz, mint az előző esetben.
Mind a négy tengelyes tükrözés esetében hat fixpont van, ebből három olyan, ahol a kiválasztott mezők a tengelyen vannak.



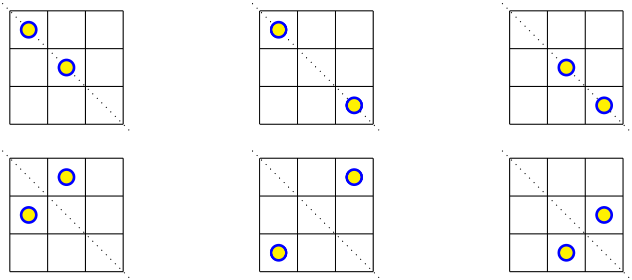
A forgatás és tükrözés esete

Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van.
Az identitás, illetve a forgatások fixpontjainak száma ugyanaz, mint az előző esetben.
Mind a négy tengelyes tükrözés esetében hat fixpont van, ebből három olyan, ahol a kiválasztott mezők a tengelyen vannak.



A forgatás és tükrözés esete

Ha tükrözést is megengedünk, akkor nyolc szimmetria van.
Az identitás, illetve a forgatások fixpontjainak száma ugyanaz, mint az előző esetben.
Mind a négy tengelyes tükrözés esetében hat fixpont van, ebből három olyan, ahol a kiválasztott mezők a tengelyen vannak.
Az eredmény $(36 + 4 + 2 \cdot 0 + 4 \cdot 6)/8 = 8$.



Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van.

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$

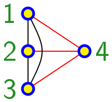
Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

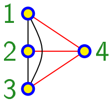


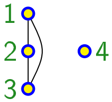
Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:



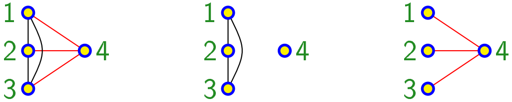


Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:



Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$

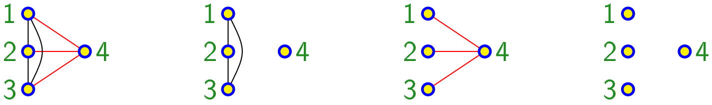
Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$
(1234)	6 permutáció	4 gráf fixpont	$24 = 6 \cdot 4$

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:



Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$
(1234)	6 permutáció	4 gráf fixpont	$24 = 6 \cdot 4$
(12)	6 permutáció	16 gráf fixpont	$96 = 6 \cdot 16$

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$
(1234)	6 permutáció	4 gráf fixpont	$24 = 6 \cdot 4$
(12)	6 permutáció	16 gráf fixpont	$96 = 6 \cdot 16$
$(12)(34)$	3 permutáció	16 gráf fixpont	$48 = 3 \cdot 16$

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$
(1234)	6 permutáció	4 gráf fixpont	$24 = 6 \cdot 4$
(12)	6 permutáció	16 gráf fixpont	$96 = 6 \cdot 16$
(12)(34)	3 permutáció	16 gráf fixpont	$48 = 3 \cdot 16$
Összesen:	24 permutáció		$264 = 24 \cdot 11$

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

Négy csúcsú gráfok

Négy számozott csúcson $2^{\binom{4}{2}} = 64$ gráf van. És izomorfia erejéig?
Az S_4 teljes szimmetrikus csoport permutálja ezeket a gráfokat.

identitás	1 permutáció	64 gráf fixpont	$64 = 1 \cdot 64$
(123)	8 permutáció	4 gráf fixpont	$32 = 8 \cdot 4$
(1234)	6 permutáció	4 gráf fixpont	$24 = 6 \cdot 4$
(12)	6 permutáció	16 gráf fixpont	$96 = 6 \cdot 16$
(12)(34)	3 permutáció	16 gráf fixpont	$48 = 3 \cdot 16$
Összesen:	24 permutáció		$264 = 24 \cdot 11$

Tehát 11 darab nemizomorf négycsúcsú gráf van.

Az (123) permutáció ($1 \mapsto 2 \mapsto 3 \mapsto 1$ és $4 \mapsto 4$) fixpont-gráfjai:

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma.

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma.
A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni,

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma.
A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni,
a $|G|/|O_i|$-t annyiszor, ahány eleme O_i-nek van.

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma.
A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni,
a $|G|/|O_i|$-t annyiszor, ahány eleme O_i-nek van.
Ezért $N = k|G|$ (ahol k a pályák száma).

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \dots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma.
A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni,
a $|G|/|O_i|$-t annyiszor, ahány eleme O_i-nek van.
Ezért $N = k|G|$ (ahol k a pályák száma).

Rögzített g mellett g fixpontjainak számát kapjuk.

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \dots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma.
A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni,
a $|G|/|O_i|$-t annyiszor, ahány eleme O_i-nek van.
Ezért $N = k|G|$ (ahol k a pályák száma).

Rögzített g mellett g fixpontjainak számát kapjuk.
Tehát N a fixpontok számának összege is egyúttal.

A Burnside-lemma bizonyítása

Legyenek G pályái az X halmazon $O_1, \ldots, O_k$.
(Ezek páronként nem metszik egymást és lefedik X-et.)
Kétféleképpen megszámoljuk azokat a (g, A) párokat,
ahol $g(A) = A$ (és $g \in G$, $A \in X$). A számuk legyen N.

Rögzített A mellett ez A stabilizátorának elemszáma.
A pálya-stabilizátor tétel miatt a $|G|/|O_i|$ számokat kell összeadni,
a $|G|/|O_i|$-t annyiszor, ahány eleme O_i-nek van.
Ezért $N = k|G|$ (ahol k a pályák száma).

Rögzített g mellett g fixpontjainak számát kapjuk.
Tehát N a fixpontok számának összege is egyúttal.
A G elemszámával osztva az állítást kapjuk:
a fixpontok számának átlaga a pályák száma. $\square$

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van.

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja.

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

90 fokos forgatásokkal egymásba vihetők: tranzitív.

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

90 fokos forgatásokkal egymásba vihetők: tranzitív.
Ezért a stabilizátorok G-nek $48/3 = 16$ elemű részcsoportjai.

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

90 fokos forgatásokkal egymásba vihetők: tranzitív.
Ezért a stabilizátorok G-nek $48/3 = 16$ elemű részcsoportjai.

Probléma:

G elemei egybevágósági transzformációk, a tér pontjait permutálják. G nem is részcsoportja a három lapból álló halmaz permutációiból álló csoportnak.

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

90 fokos forgatásokkal egymásba vihetők: tranzitív.
Ezért a stabilizátorok G-nek $48/3 = 16$ elemű részcsoportjai.

Probléma:

G elemei egybevágósági transzformációk, a tér pontjait permutálják. G nem is részcsoportja a három lapból álló halmaz permutációiból álló csoportnak. Mit jelent a pálya és stabilizátor?

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

90 fokos forgatásokkal egymásba vihetők: tranzitív.
Ezért a stabilizátorok G-nek $48/3 = 16$ elemű részcsoportjai.

Probléma:

G elemei egybevágósági transzformációk, a tér pontjait permutálják. G nem is részcsoportja a három lapból álló halmaz permutációiból álló csoportnak. Mit jelent a pálya és stabilizátor?

Megoldás: G elemei „hatnak” a szemköztes lappárok halmazán.

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

90 fokos forgatásokkal egymásba vihetők: tranzitív.
Ezért a stabilizátorok G-nek $48/3 = 16$ elemű részcsoportjai.

Probléma:

G elemei egybevágósági transzformációk, a tér pontjait permutálják. G nem is részcsoportja a három lapból álló halmaz permutációiból álló csoportnak. Mit jelent a pálya és stabilizátor?

Megoldás: G elemei „hatnak” a szemköztes lappárok halmazán.
Ugyanígy: hatnak pl. a kocka éleinek halmazán is.

Csoporthatás: Példa

4.5.29. Feladat

Egy kockának három szemköztes lappárja van. Ezeket a kocka G szimmetriacsoportja permutálja. Mik a pályák, és a stabilizátorok?

90 fokos forgatásokkal egymásba vihetők: tranzitív.
Ezért a stabilizátorok G-nek $48/3 = 16$ elemű részcsoportjai.

Probléma:

G elemei egybevágósági transzformációk, a tér pontjait permutálják. G nem is részcsoportja a három lapból álló halmaz permutációiból álló csoportnak. Mit jelent a pálya és stabilizátor?

Megoldás: G elemei „hatnak” a szemköztes lappárok halmazán.
Ugyanígy: hatnak pl. a kocka éleinek halmazán is. Ha $g \in G$, akkor g az AB élt a $g(A)g(B)$ élbe „viszi”.

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és
$1 * x = x$

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és
$1 * x = x$ (az egységelem identikusan hat).

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és
$1 * x = x$ (az egységelem identikusan hat).

Minden $G \leq S_X$ permutációcsoport hatás: $g * x = g(x)$.

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és
$1 * x = x$ (az egységelem identikusan hat).

Minden $G \leq S_X$ permutációcsoport hatás: $g * x = g(x)$.

4.5.14. Definíció

Ha G hat X-en, akkor

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és
$1 * x = x$ (az egységelem identikusan hat).

Minden $G \leq S_X$ permutációcsoport hatás: $g * x = g(x)$.

4.5.14. Definíció

Ha G hat X-en, akkor
$x \in X$ pályája $\{g(x) : g \in G\}$;

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport **hat** az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és
$1 * x = x$ (az egységelem identikusan hat).

Minden $G \leq S_X$ permutációcsoport hatás: $g * x = g(x)$.

4.5.14. Definíció

Ha G hat X-en, akkor
$x \in X$ **pályája** $\{g(x) : g \in G\}$;
$g \in G$ **stabilizátora** $\{g \in G : g(x) = x\}$.

Csoporthatás: definíció

4.5.12. Definíció

A G csoport hat az X halmazon, ha minden $g \in G$ és $x \in X$ esetén értelmezve van $g * x \in X$ úgy, hogy
$g * (h * x) = (gh) * x$ (a szorzat kompozícióként hat), és
$1 * x = x$ (az egységelem identikusan hat).

Minden $G \leq S_X$ permutációcsoport hatás: $g * x = g(x)$.

4.5.14. Definíció

Ha G hat X-en, akkor
$x \in X$ pályája $\{g(x) : g \in G\}$;
$g \in G$ stabilizátora $\{g \in G : g(x) = x\}$.

Mind a pálya-stabilizátor-tétel, mind a Burnside-lemma érvényes csoporthatásokra is, ugyanazzal a bizonyítással.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli,

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. □

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. □

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással).

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. □

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással). Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással). Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint. $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1\}$,

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. □

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan: Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással). Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint. $\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1\}$, mert ha $g * h = h$ minden h-ra, akkor $g = 1$.

Cayley tétele

4.12.3. Gyakorlat

Ha a G csoport hat az X halmazon, akkor legyen $\Psi : G \to S_X$ az a leképezés, amely a $g \in G$ elemhez a g hatását, mint permutációt rendeli, azaz $\Psi(g)(x) = g * x$. Ekkor ψ csoporthomomorfizmus.

Biz.: $\Psi(gh)(x) = (gh) * x = g * (h * x) = [\Psi(g) \circ \Psi(h)](x)$. $\square$

4.6.24. Tétel (Cayley)

Minden csoport izomorf egy permutációcsoporttal.

Bizonyítás: A $g \in G$ elemnek megfelelő permutációt a Cayley-táblázat g-hez tartozó sora adja meg. Formálisan:
Legyen $X = G$ és $g * x = gx$ (vagyis G önmagán hat balszorzással).
Legyen Ψ az ehhez tartozó homomorfizmus a fentiek szerint.
$\mathrm{Ker}(\Psi) = \{1\}$, mert ha $g * h = h$ minden h-ra, akkor $g = 1$.
A homomorfizmus-tétel miatt $G \cong \mathrm{Im}(\Psi) \leq S_G$. $\square$

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport,

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek,

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály,

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor,

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre. Prímrendű, illetve ciklikus csoportok részcsoportjai.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre. Prímrendű, illetve ciklikus csoportok részcsoportjai.
Csoportok, melyeknek csak két részcsoportja van.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre. Prímrendű, illetve ciklikus csoportok részcsoportjai.
Csoportok, melyeknek csak két részcsoportja van.
Pálya-stabilizátor-tétel.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre. Prímrendű, illetve ciklikus csoportok részcsoportjai.
Csoportok, melyeknek csak két részcsoportja van.
Pálya-stabilizátor-tétel. A pályák partíciót alkotnak.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre. Prímrendű, illetve ciklikus csoportok részcsoportjai.
Csoportok, melyeknek csak két részcsoportja van.
Pálya-stabilizátor-tétel. A pályák partíciót alkotnak.
A kocka szimmetriacsoportja.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre. Prímrendű, illetve ciklikus csoportok részcsoportjai.
Csoportok, melyeknek csak két részcsoportja van.
Pálya-stabilizátor-tétel. A pályák partíciót alkotnak.
A kocka szimmetriacsoportja. Burnside-lemma.

A 11. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

Fogalmak

Részcsoport, komplexusműveletek, mellékosztály, index.
Egy elemmel generált részcsoport. Ekvivalencia-reláció.
Permutációcsoport, pálya, stabilizátor, tranzitivitás. Csoporthatás.

Tételek

Részcsoport jellemzése zártsággal. A mellékosztályok diszjunktak.
A bal és jobb index egyenlő. Lagrange tétele részcsoportra és elemrendre. Prímrendű, illetve ciklikus csoportok részcsoportjai.
Csoportok, melyeknek csak két részcsoportja van.
Pálya-stabilizátor-tétel. A pályák partíciót alkotnak.
A kocka szimmetriacsoportja. Burnside-lemma. Cayley-tétel.