

# Lineáris és absztrakt algebra, normál

## ELTE Algebra és Számelmélet Tanszék

Előadó: Kiss Emil

Konzultáció: [ewwkiss@gmail.com](mailto:ewwkiss@gmail.com)

<https://algebra.elte.hu/nyitolap/oktatas-szakdolgozat/linearis-es-absztrakt-algebra/>

1. előadás

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat



# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
- \* Bilineáris függvény, Sylvester tehetetlenségi tétele

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
- \* Bilineáris függvény, Sylvester tehetetlenségi tétele
- \* Szingulárisérték-felbontás

# A félév anyaga lineáris algebrából

- Vektortér, altér, függés, függetlenség, bázis, dimenzió
- Skaláris szorzat  $\mathbb{R}^n$ -ben, vektorok hossza és szöge
- Lineáris leképezések, mátrixuk, bázistranszformáció
- Képtér, magtér, dimenziótétel, rang, invertálhatóság
- Sajátérték, karakterisztikus polinom, diagonalizálás
- Minimálpolinom, invariáns alterek, Jordan normálalak
- Euklideszi terek: merőlegesség és skaláris szorzat
- Egybevágósági transzformációk valós és komplex fölött
- Diagonalizálhatóság ortonormált bázisban
- Kvadratikus alak négyzetösszeg alakja
- \* Bilineáris függvény, Sylvester tehetetlenségi tétele
- \* Szingulárisérték-felbontás

Tankönyv: **Freud Róbert: Lineáris algebra.**

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.



# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
- Szám minimálpolinomja, testbővítés foka\*.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
- Szám minimálpolinomja, testbővítés foka\*.
- \* Geometriai szerkeszthetőség, egyenletek megoldóképlete.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
- Szám minimálpolinomja, testbővítés foka\*.
- \* Geometriai szerkeszthetőség, egyenletek megoldóképlete.
- \* Véges testek. Hibajavító kódolás.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
- Szám minimálpolinomja, testbővítés foka\*.
- \* Geometriai szerkeszthetőség, egyenletek megoldóképlete.
- \* Véges testek. Hibajavító kódolás.
- \* Kvaterniók csoportelméleti vonatkozásai, térbeli forgatás.



# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
- Szám minimálpolinomja, testbővítés foka\*.
- \* Geometriai szerkeszthetőség, egyenletek megoldóképlete.
- \* Véges testek. Hibajavító kódolás.
- \* Kvaterniók csoportelméleti vonatkozásai, térbeli forgatás.
- \* Csoportalgebra, Fourier-transzformáció, tömörítés, zajszűrés.

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
- Szám minimálpolinomja, testbővítés foka\*.
- \* Geometriai szerkeszthetőség, egyenletek megoldóképlete.
- \* Véges testek. Hibajavító kódolás.
- \* Kvaterniók csoportelméleti vonatkozásai, térbeli forgatás.
- \* Csoportalgebra, Fourier-transzformáció, tömörítés, zajszűrés.

- **Jegyzetek:**

- **Kiss Emil: Bevezetés az algebrába.**

# A félév anyaga absztrakt algebrából

**Célkitűzés:** A fogalomalkotás bemutatása, kitekintés.

- **Csoportok:**

- Diéder- és kvaterniócsoport, mátrixcsoportok. Ciklikus csoport.
- Részcsoport, elemrend, homomorfizmus, direkt szorzat\*.
- Permutációcsoportok: szimmetriák, leszámlálások.
- Konjugáltság, normálosztó, faktorcsoport. Generálás.

- **Gyűrűk és testek:**

- Faktorgyűrű, generált ideál és résztest. Kvaterniók.
- Szám minimálpolinomja, testbővítés foka\*.
- \* Geometriai szerkeszthetőség, egyenletek megoldóképlete.
- \* Véges testek. Hibajavító kódolás.
- \* Kvaterniók csoportelméleti vonatkozásai, térbeli forgatás.
- \* Csoportalgebra, Fourier-transzformáció, tömörítés, zajszűrés.

- **Jegyzetek:**

- **Kiss Emil: Bevezetés az algebrába.**
- Czédli-Szendrei-Szendrei: Absztrakt algebrai feladatok.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.



# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

Az **előadáson** figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

Az **előadáson** figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

- **Írásbeli vizsga**. Anyaga: e prezentáció nem csillagos részei.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

Az **előadáson** figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

- **Írásbeli vizsga**. Anyaga: e prezentáció nem csillagos részei.
- Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

Az **előadáson** figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

- **Írásbeli vizsga**. Anyaga: e prezentáció nem csillagos részei.
- Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
- Hivatkozások a tankönyvekre, ahol magyarázatok is vannak.

# A számonkérés anyaga és módja

A **gyakorlat célja** az elméleti anyag **megértése**.

- **Módja**: önálló feladatmegoldás. Feladatsorok a honlapon.
- Begyakorlás otthon: feladatok a két tankönyvben.
- Két **évfolyamzárthelyi**;
- az elégtelen zárthelyiket ki kell javítani;
- javító a félév végén, a gyakorlatvezető döntése alapján.
- Ha nem sikerül: gyakorlati jegy utóvizsga.
- Csak érvényes gyakorlati jeggyel lehet vizsgázni.

Az **előadáson** figyelni érdemes, **nem jegyzetelni!**

- **Írásbeli vizsga**. Anyaga: e prezentáció nem csillagos részei.
- Nyomtatható változat is letölthető a honlapról.
- Hivatkozások a tankönyvekre, ahol magyarázatok is vannak.
- **Minta**: az előző évi vizsgák a honlapon.

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test.



# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok,

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ .

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

**összeadást**

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} =$$

**összeadást**

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

**összeadást**

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

**összeadást** és a  $\lambda$  **skalárral szorzást**



# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$

**összeadást** és a  $\lambda$  **skalárral szorzást** ( $\lambda \in T$ ).

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$$

**összeadást** és a  $\lambda$  **skalárral szorzást** ( $\lambda \in T$ ).

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az **összeadást** és a  $\lambda$  **skalárral szorzást** ( $\lambda \in T$ ).

# Oszlopvektorok (ismétlés)

## Definíció

Legyen  $T$  test. A  $T$  fölötti  $n$  magasságú **oszlopvektorok** az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix}$$

alakú mátrixok, ahol  $a_1, \dots, a_n \in T$ . Ezek halmaza  $T^n$ .

## Definíció

Legyen  $T$  test, és értelmezzük  $T^n$ -en az

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \dots \\ a_n + b_n \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad \lambda \begin{bmatrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda a_1 \\ \dots \\ \lambda a_n \end{bmatrix}$$

képletekkel az **összeadást** és a  $\lambda$  **skalárral szorzást** ( $\lambda \in T$ ).

Azaz összeadni és skalárral szorozni **komponensenként** kell.

# Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

# Az összeadás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

(1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).

A **nullvektor**



# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

(minden komponens  $T$  nulleleme)

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  ( $0$  a **nullvektor**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$

(minden komponens  $T$  nulleleme)

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (0 a **nullvektor**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$  és az **ellentett**:

(minden komponens  $T$  nulleleme)

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (0 a **nullvektor**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$  és az **ellentett**:  $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} =$

(minden komponens  $T$  nulleleme)

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (0 a **nullvektor**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$  és az **ellentett**:  $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens  $T$  nulleleme)

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  ( $0$  a **nullvektor**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$  és az **ellentett**:  $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens  $T$  nulleleme) (komponensenkénti ellentett)

# Az összeadás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v, w \in T^n$  vektorokra

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  ( $0$  a **nullvektor**).
- (4)  $u + (-u) = (-u) + u = 0$  ( $-u$  az  $u$  **ellentettje**).

A **nullvektor**  $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$  és az **ellentett**:  $-\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \dots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ \dots \\ -a_n \end{bmatrix}$

(minden komponens  $T$  nulleleme) (komponensenkénti ellentett)



# A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

# A skalárral szorzás tulajdonságai

Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test egységeleme)}.$$

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test } \textbf{egységeleme} \text{)}.$$

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárookra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test } \textbf{egységeleme} \text{)}.$$

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A  $T^{n \times m}$ -beli mátrixok.

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárookra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test egységeleme)}.$$

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A  $T^{n \times m}$ -beli mátrixok.
- $T[x]$  polinomjai:



# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test } \textbf{egységeleme} \text{)}.$$

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A  $T^{n \times m}$ -beli mátrixok.
- $T[x]$  polinomjai:  $\lambda(a_0 + \dots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \dots + (\lambda a_n) x^n$ .

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test } \textbf{egységeleme} \text{)}.$$

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A  $T^{n \times m}$ -beli mátrixok.
- $T[x]$  polinomjai:  $\lambda(a_0 + \dots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \dots + (\lambda a_n) x^n$ .
- Valós függvények (a **pontonkénti** műveletekre):

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test } \textbf{egységeleme} \text{)}.$$

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A  $T^{n \times m}$ -beli mátrixok.
- $T[x]$  polinomjai:  $\lambda(a_0 + \dots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \dots + (\lambda a_n) x^n$ .
- Valós függvények (a **pontonkénti** műveletekre):  
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$

# A skalárral szorzás tulajdonságai

## Tétel (HF ellenőrizni)

Tetszőleges  $u, v \in T^n$  vektorokra, és  $\lambda, \mu$  skalárokra

$$(5) (\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u.$$

$$(6) \lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v.$$

$$(7) (\lambda\mu)u = \lambda(\mu u).$$

$$(8) 1 \cdot u = u \text{ (ahol } 1 \text{ a } T \text{ test } \textbf{egységeleme} \text{)}.$$

További példák ilyen tulajdonságú műveletekre.

- A  $T^{n \times m}$ -beli mátrixok.
- $T[x]$  polinomjai:  $\lambda(a_0 + \dots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + \dots + (\lambda a_n) x^n$ .
- Valós függvények (a **pontonkénti** műveletekre):  
 $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$  és  $(\lambda f)(x) = \lambda(f(x))$ .

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).  
 $V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás,

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).  
 $V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás,  
továbbá a skalárral szorzás



# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).  
 $V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás,  
továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor)

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás,

továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

(1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

(1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).

(2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (**LÉTEZIK 0 nullvektor**).

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (**LÉTEZIK**  $0$  nullvektor).
- (4)  $u + (-u) = (-u) + u = 0$  (**LÉTEZIK**  $-u$ , az  $u$  **ellentettje**).

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (**LÉTEZIK**  $0$  nullvektor).
- (4)  $u + (-u) = (-u) + u = 0$  (**LÉTEZIK**  $-u$ , az  $u$  **ellentettje**).
- (5)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ .

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (**LÉTEZIK**  $0$  nullvektor).
- (4)  $u + (-u) = (-u) + u = 0$  (**LÉTEZIK**  $-u$ , az  $u$  **ellentettje**).
- (5)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ .
- (6)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ .



# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (**LÉTEZIK**  $0$  nullvektor).
- (4)  $u + (-u) = (-u) + u = 0$  (**LÉTEZIK**  $-u$ , az  $u$  **ellentettje**).
- (5)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ .
- (6)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ .
- (7)  $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ .

# A vektortér fogalma

## Definíció (F4.1.1. Definíció)

$T$  test (elemei a **skalárok**),  $V$  halmaz (elemei a **vektorok**).

$V$  **vektortér**  $T$  fölött, ha értelmezett a  $V$ -beli  $+$  összeadás, továbbá a skalárral szorzás (skalárszor vektor = vektor) úgy, hogy tetszőleges  $u, v, w \in V$  és  $\lambda, \mu \in T$  esetén

- (1)  $(u + v) + w = u + (v + w)$  (az összeadás **asszociatív**).
- (2)  $u + v = v + u$  (az összeadás **kommutatív**).
- (3)  $u + 0 = 0 + u = u$  (**LÉTEZIK**  $0$  nullvektor).
- (4)  $u + (-u) = (-u) + u = 0$  (**LÉTEZIK**  $-u$ , az  $u$  **ellentettje**).
- (5)  $(\lambda + \mu)u = \lambda u + \mu u$ .
- (6)  $\lambda(u + v) = \lambda u + \lambda v$ .
- (7)  $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u)$ .
- (8)  $1 \cdot u = u$  (ahol  $1$  a  $T$  test **egységeleme**).

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**,  
ha párhuzamosak,

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.  
Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

Az  $A$  pont és az  $\vec{OA}$  vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű.

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

Az  $A$  pont és az  $\vec{OA}$  vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az  $\vec{OA}$  az  $A$  pont **helyvektora**.



# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

Az  $A$  pont és az  $\vec{OA}$  vektor közötti megfeleltetés

kölcsönösen egyértelmű. Az  $\vec{OA}$  az  $A$  pont **helyvektora**.

Ha  $A = (a, b, c)$ , akkor  $\vec{OA}$  jele is  $(a, b, c)$ .

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

Az  $A$  pont és az  $\vec{OA}$  vektor közötti megfeleltetés

kölcsönösen egyértelmű. Az  $\vec{OA}$  az  $A$  pont **helyvektora**.

Ha  $A = (a, b, c)$ , akkor  $\vec{OA}$  jele is  $(a, b, c)$ .

Tehát  $(a, b, c)$  nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

Az  $A$  pont és az  $\vec{OA}$  vektor közötti megfeleltetés

kölcsönösen egyértelmű. Az  $\vec{OA}$  az  $A$  pont **helyvektora**.

Ha  $A = (a, b, c)$ , akkor  $\vec{OA}$  jele is  $(a, b, c)$ .

Tehát  $(a, b, c)$  nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

Az  $A$  pont és az  $\vec{OA}$  vektor közötti megfeleltetés

kölcsönösen egyértelmű. Az  $\vec{OA}$  az  $A$  pont **helyvektora**.

Ha  $A = (a, b, c)$ , akkor  $\vec{OA}$  jele is  $(a, b, c)$ .

Tehát  $(a, b, c)$  nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).

A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti műveleteknek felelnek meg.

# A sík és a tér vektorai

## Ismétlés

A vektorok irányított szakaszok, de két vektor **egyenlő**, ha párhuzamosak, egyenlő hosszúak és irányúak.

Így minden vektor kezdőpontja az  $O$  origóba tolható.

Az  $A$  pont és az  $\vec{OA}$  vektor közötti megfeleltetés kölcsönösen egyértelmű. Az  $\vec{OA}$  az  $A$  pont **helyvektora**.

Ha  $A = (a, b, c)$ , akkor  $\vec{OA}$  jele is  $(a, b, c)$ .

Tehát  $(a, b, c)$  nemcsak egy pont a térben, hanem térvektor is.

A térvektorok az összeadásra (paralelogrammaszabály) és a skalárral szorzásra vektorteret alkotnak (HF).

A helyvektoroknál ezek a műveletek a komponensenkénti műveleteknek felelnek meg. Ezért a térvektorok vektortere „ugyanolyan”, mint az oszlopvektorok  $\mathbb{R}^3$  vektortere.

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

(1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.



# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

$$\lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v$$

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

$$\lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v$$

A (7) vektortéraxióma miatt.

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

$$\text{Így } 0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v$$



# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

$$\text{Így } 0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v$$

A fenti (4) miatt.

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

$$\text{Így } 0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v$$

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

$$\text{Így } 0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$$

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

$$\text{Így } 0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$$

A (8) vektortéraxióma miatt.

# Elemi következmények

## Tétel (F4.1.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött,  $\lambda \in T$ ,  $v \in V$ .

- (1) A  $V$  nulleleme egyértelműen meghatározott.
- (2) Minden vektor ellentettje egyértelműen meghatározott.
- (3) Minden  $v$  vektorra  $0v = 0$  (a bal  $0$  skalár, a jobb  $0$  vektor).
- (4) Minden  $\lambda$  skalárra  $\lambda 0 = 0$  (itt  $0$  a nullvektor).
- (5) Ha  $\lambda v = 0$ , akkor  $\lambda = 0$  vagy  $v = 0$ .
- (6) Minden  $v$  vektorra  $(-1)v = -v$  (a  $v$  ellentettje).

## Mintabizonyítás (5)-re

Ha  $\lambda v = 0$ , de  $\lambda \neq 0$ , akkor létezik  $\lambda^{-1}$ .

Így  $0 = \lambda^{-1}0 = \lambda^{-1}(\lambda v) = (\lambda^{-1}\lambda)v = 1v = v$ . □

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**,

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.



# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

(1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.  
Azaz  $W$  az  $x$ -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.  
Azaz  $W$  az  $x$ -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).
- (2)  $V = \mathbb{Q}[x]$  a  $\mathbb{Q}$  fölött.

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.  
Azaz  $W$  az  $x$ -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).
- (2)  $V = \mathbb{Q}[x]$  a  $\mathbb{Q}$  fölött.  
 $W$  azok a polinomok, amelyeknek az  $1$  gyöke.

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.  
Azaz  $W$  az  $x$ -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).
- (2)  $V = \mathbb{Q}[x]$  a  $\mathbb{Q}$  fölött.  
 $W$  azok a polinomok, amelyeknek az  $1$  gyöke.
- (3)  $V$  a valós függvények  $\mathbb{R}$  fölött.

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.  
Azaz  $W$  az  $x$ -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).
- (2)  $V = \mathbb{Q}[x]$  a  $\mathbb{Q}$  fölött.  
 $W$  azok a polinomok, amelyeknek az  $1$  gyöke.
- (3)  $V$  a valós függvények  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  a folytonos függvények.

# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.  
Azaz  $W$  az  $x$ -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).
- (2)  $V = \mathbb{Q}[x]$  a  $\mathbb{Q}$  fölött.  
 $W$  azok a polinomok, amelyeknek az  $1$  gyöke.
- (3)  $V$  a valós függvények  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  a folytonos függvények.
- (4)  $V$  a kétszer kettes komplex mátrixok  $\mathbb{C}$  fölött.



# Az altér fogalma

## Definíció (F4.2.1. Definíció)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött. A  $W \subseteq V$  részhalmaz **altér**, ha maga is vektortér  $V$  műveleteire nézve.

## Példák

- (1)  $V$  a sík vektorai  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  az  $x$ -tengellyel párhuzamos vektorok.  
Azaz  $W$  az  $x$ -tengely (a megfelelő helyvektorok végpontjai).
- (2)  $V = \mathbb{Q}[x]$  a  $\mathbb{Q}$  fölött.  
 $W$  azok a polinomok, amelyeknek az  $1$  gyöke.
- (3)  $V$  a valós függvények  $\mathbb{R}$  fölött.  
 $W$  a folytonos függvények.
- (4)  $V$  a kétszer kettes komplex mátrixok  $\mathbb{C}$  fölött.  
 $W$  a felső háromszögmátrixok.

# Az altér jellemzése

Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1)  $W$  zárt az összeadásra,

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

- (1)  $W$  zárt az összeadásra,  
azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

- (1)  $W$  zárt az összeadásra,  
azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .
- (2)  $W$  zárt a skalárral szorzásra,

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

- (1)  $W$  zárt az összeadásra,  
azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .
- (2)  $W$  zárt a skalárral szorzásra,  
azaz tetszőleges  $\lambda \in T$  és  $w \in W$  esetén  $\lambda w \in W$ .

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

- (1)  $W$  zárt az összeadásra,  
azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .
- (2)  $W$  zárt a skalárral szorzásra,  
azaz tetszőleges  $\lambda \in T$  és  $w \in W$  esetén  $\lambda w \in W$ .

Segítség:  $0 = 0v$ ,



# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

- (1)  $W$  zárt az összeadásra,  
azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .
- (2)  $W$  zárt a skalárral szorzásra,  
azaz tetszőleges  $\lambda \in T$  és  $w \in W$  esetén  $\lambda w \in W$ .

Segítség:  $0 = 0v$ , és az ellentett  $-v = (-1)v$ .

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1)  $W$  zárt az összeadásra,

azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .

(2)  $W$  zárt a skalárral szorzásra,

azaz tetszőleges  $\lambda \in T$  és  $w \in W$  esetén  $\lambda w \in W$ .

Segítség:  $0 = 0v$ , és az ellentett  $-v = (-1)v$ .

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

(1)  $W$  zárt az összeadásra,

azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .

(2)  $W$  zárt a skalárral szorzásra,

azaz tetszőleges  $\lambda \in T$  és  $w \in W$  esetén  $\lambda w \in W$ .

Segítség:  $0 = 0v$ , és az ellentett  $-v = (-1)v$ .

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

(1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.

(2) Altérek metszete is altér.

# Az altér jellemzése

## Tétel (F4.2.2. Tétel, HF)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött.

A  $W \subseteq V$  nem üres részhalmaz akkor és csak akkor altér, ha

- (1)  $W$  zárt az összeadásra,  
azaz tetszőleges  $w_1, w_2 \in W$  esetén  $w_1 + w_2 \in W$ .
- (2)  $W$  zárt a skalárral szorzásra,  
azaz tetszőleges  $\lambda \in T$  és  $w \in W$  esetén  $\lambda w \in W$ .

Segítség:  $0 = 0v$ , és az ellentett  $-v = (-1)v$ .

F4.2.15. és F4.2.12. Feladat, HF:

- (1) Altér nulleleme ugyanaz, mint az eredeti vektortéré.
- (2) Altérek metszete is altér.
- (3) Két altér uniója **csak akkor** altér, ha valamelyikük tartalmazza a másikat.

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon.

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A  $v$  skalárszorosait (azaz a  $\lambda v$  vektorokat) be kell venni.

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A  $v$  skalárszorosait (azaz a  $\lambda v$  vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.



# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A  $v$  skalárszorosait (azaz a  $\lambda v$  vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a  $v$ -vel párhuzamos vektorok, ha  $v \neq 0$ .

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávinnünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A  $v$  skalárszorosait (azaz a  $\lambda v$  vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a  $v$ -vel párhuzamos vektorok, ha  $v \neq 0$ . A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A  $v$  skalárszorosait (azaz a  $\lambda v$  vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a  $v$ -vel párhuzamos vektorok, ha  $v \neq 0$ . A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az  $x$  és  $x^2$  polinomok  $\mathbb{R}[x]$ -ben.

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A  $v$  skalárszorosait (azaz a  $\lambda v$  vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a  $v$ -vel párhuzamos vektorok, ha  $v \neq 0$ . A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az  $x$  és  $x^2$  polinomok  $\mathbb{R}[x]$ -ben. Mely polinomokat kell hozzávennünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

# Altér készítése

## Kérdés

Adott egy  $v$  vektor a síkon. Mely vektorokat kell hozzávinnünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

A  $v$  skalárszorosait (azaz a  $\lambda v$  vektorokat) be kell venni. Ez elég, mert ezek halmaza zárt mindkét műveletre.

Ezek pont a  $v$ -vel párhuzamos vektorok, ha  $v \neq 0$ . A megfelelő helyvektorok végpontjai egy origón átmenő egyenest alkotnak.

Adottak az  $x$  és  $x^2$  polinomok  $\mathbb{R}[x]$ -ben. Mely polinomokat kell hozzávinnünk (minél kevesebbet), hogy alteret kapjunk?

Az  $ax + bx^2$  alakú polinomok már alteret alkotnak ( $a, b \in \mathbb{R}$ ).

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .  
Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .  
Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,  
ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ ,



# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .  
Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,  
ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**,

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

## Elnevezések

A  $v_1, \dots, v_m$  vektorok neve: **generátorok**.

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

## Elnevezések

A  $v_1, \dots, v_m$  vektorok neve: **generátorok**.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  a  $v_1, \dots, v_m$  egy **lineáris kombinációja**.

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

## Elnevezések

A  $v_1, \dots, v_m$  vektorok neve: **generátorok**.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  a  $v_1, \dots, v_m$  egy **lineáris kombinációja**.

A  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ennek a lineáris kombinációnak az **együtthatói**.

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

## Elnevezések

A  $v_1, \dots, v_m$  vektorok neve: **generátorok**.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  a  $v_1, \dots, v_m$  egy **lineáris kombinációja**.

A  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ennek a lineáris kombinációnak az **együtthatói**.

A  $v_1, \dots, v_m$  **generátorrendszer** a  $V$  vektortérben,

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

## Elnevezések

A  $v_1, \dots, v_m$  vektorok neve: **generátorok**.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  a  $v_1, \dots, v_m$  egy **lineáris kombinációja**.

A  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ennek a lineáris kombinációnak az **együtthatói**.

A  $v_1, \dots, v_m$  **generátorrendszer** a  $V$  vektortérben,

ha  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$ .



# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

## Elnevezések

A  $v_1, \dots, v_m$  vektorok neve: **generátorok**.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  a  $v_1, \dots, v_m$  egy **lineáris kombinációja**.

A  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ennek a lineáris kombinációnak az **együtthatói**.

A  $v_1, \dots, v_m$  **generátorrendszer** a  $V$  vektortérben,

ha  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$ .

**A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.**

# Generált altér

## Tétel (F4.3.4. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  alakú vektorok,

ahol  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m \in T$ , altérrel alkotnak  $V$ -ben.

Ez a  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$  által **generált altér**, jele  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle$ .

## Elnevezések

A  $v_1, \dots, v_m$  vektorok neve: **generátorok**.

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m$  a  $v_1, \dots, v_m$  egy **lineáris kombinációja**.

A  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  ennek a lineáris kombinációnak az **együtthatói**.

A  $v_1, \dots, v_m$  **generátorrendszer** a  $V$  vektortérben,

ha  $\langle v_1, v_2, \dots, v_m \rangle = V$ .

**A generált altér a generátorok lineáris kombinációinak halmaza.**

Egy vektortérnek általában sok generátorrendszere van!

# Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer,

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban  
pontosan ezeket a polinomokat kapjuk

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban  
pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban  
pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).  
De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is,

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban  
pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$



## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis  $\lambda(1 + x) + \mu x$  alakban  $V$  minden eleme megkapható.

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött. Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis  $\lambda(1 + x) + \mu x$  alakban  $V$  minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban  
pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis  $\lambda(1 + x) + \mu x$  alakban  $V$  minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!  
Például  $\{1, x, x^2\}$  **nem** generátorrendszer a fenti  $V$ -ben,

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött. Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis  $\lambda(1 + x) + \mu x$  alakban  $V$  minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!

Például  $\{1, x, x^2\}$  **nem** generátorrendszer a fenti  $V$ -ben, noha  $V$  elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött. Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis  $\lambda(1 + x) + \mu x$  alakban  $V$  minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!

Például  $\{1, x, x^2\}$  **nem** generátorrendszer a fenti  $V$ -ben, noha  $V$  elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

### Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha  $v$  és  $w$  nem párhuzamos síkvektorok,

## Példák generátorrendszerre

Legyen  $V$  a legfeljebb elsőfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött. Ebben  $\{1, x\}$  generátorrendszer, mert  $\lambda \cdot 1 + \mu \cdot x$  alakban pontosan ezeket a polinomokat kapjuk ( $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ).

De generátorrendszer  $\{1 + x, x\}$  is, mert

$$ax + b = b(1 + x) + (a - b)x,$$

vagyis  $\lambda(1 + x) + \mu x$  alakban  $V$  minden eleme megkapható.

Egy altér generátorrendszerének elemei az altérben vannak!

Például  $\{1, x, x^2\}$  **nem** generátorrendszer a fenti  $V$ -ben, noha  $V$  elemei felírhatók ezek lineáris kombinációjaként.

### Házi feladat (fizikából tudjuk)

Ha  $v$  és  $w$  nem párhuzamos síkvektorok, akkor generátorrendszert alkotnak a sík vektorainak vektorterében.

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .



# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ ,

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ ,

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert

$$\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m.$$

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert

$\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$ . Így  $U$  skalárral szorzásra zárt.

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert

$\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$ . Így  $U$  skalárral szorzásra zárt.

Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.



# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert

$\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$ . Így  $U$  skalárral szorzásra zárt.

Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.

Ha  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$ ,

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert

$\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$ . Így  $U$  skalárral szorzásra zárt.

Az összegre zártság bizonyítása hasonló, **HF**.

Ha  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$ ,

mert  $W$  zárt a skalárral szorzásra.

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert

$\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$ . Így  $U$  skalárral szorzásra zárt.

Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.

Ha  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$ ,

mert  $W$  zárt a skalárral szorzásra. Ezért

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in W$ ,

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert  $\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$ . Így  $U$  skalárral szorzásra zárt.

Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.

Ha  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$ ,

mert  $W$  zárt a skalárral szorzásra. Ezért

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in W$ , mert  $W$  zárt az összeadásra.

# A tétel bizonyítása

## F4.3.4. Tétel: kiegészítés

$\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  a **legsűkebb**  $v_1, \dots, v_m$ -et tartalmazó altér.

Azaz ha  $W$  altér és  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle \subseteq W$ .

## Bizonyítás

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, v_2, \dots, v_m \in V$ .

$U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$  nem üres, mert  $0 = 0v_1 + \dots + 0v_m \in U$ .

Ha  $u = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \in U$  és  $\lambda \in T$ , akkor  $\lambda u \in U$ , mert  $\lambda u = (\lambda \lambda_1) v_1 + \dots + (\lambda \lambda_m) v_m$ . Így  $U$  skalárral szorzásra zárt.

Az összegre zártság bizonyítása hasonló, HF.

Ha  $v_1, \dots, v_m \in W$ , akkor  $\lambda_1 v_1, \lambda_2 v_2, \dots, \lambda_m v_m \in W$ ,

mert  $W$  zárt a skalárral szorzásra. Ezért

$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \in W$ , mert  $W$  zárt az összeadásra.

Így  $\langle v_1, \dots, v_m \rangle$  minden eleme  $W$ -ben van. □

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak?

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen.



# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen.  
Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak.

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok,

## Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**,

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül**: ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül**: ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban?

## Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban? **Másképp:** mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban? **Másképp:** mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

Ha  $u \parallel v$ , akkor igen.

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban? **Másképp:** mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

Ha  $u \parallel v$ , akkor igen. Ha nem, akkor abban az esetben, ha  $w$  felírható  $\alpha u + \beta v$  alakban



# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban? **Másképp:** mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

Ha  $u \parallel v$ , akkor igen. Ha nem, akkor abban az esetben, ha  $w$  felírható  $\alpha u + \beta v$  alakban (mert  $u$  és  $v$  generálják ezt a síkot).

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban? **Másképp:** mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

Ha  $u \parallel v$ , akkor igen. Ha nem, akkor abban az esetben, ha  $w$  felírható  $\alpha u + \beta v$  alakban (mert  $u$  és  $v$  generálják ezt a síkot). **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  skalárok,

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban? **Másképp:** mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

Ha  $u \parallel v$ , akkor igen. Ha nem, akkor abban az esetben, ha  $w$  felírható  $\alpha u + \beta v$  alakban (mert  $u$  és  $v$  generálják ezt a síkot). **Esetszétválasztás nélkül:** ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  skalárok, **nem mindhárom nulla**,

# Vektorok egy síkban

Mikor vannak a sík  $u$ ,  $v$  vektorai egy egyenesen?

Azaz mikor párhuzamosak? Ha valamelyikük nulla, akkor igen. Ha egyik sem nulla, akkor pontosan abban az esetben, ha mindegyik skalárszorosa a másiknak. **Esetszétválasztás nélkül**: ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$  skalárok, **nem mindkettő nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v = 0$ .

Mikor vannak a tér  $u$ ,  $v$ ,  $w$  vektorai egy síkban? **Másképp**: mikor van három helyvektor végpontja egy origón átmenő síkban?

Ha  $u \parallel v$ , akkor igen. Ha nem, akkor abban az esetben, ha  $w$  felírható  $\alpha u + \beta v$  alakban (mert  $u$  és  $v$  generálják ezt a síkot). **Esetszétválasztás nélkül**: ha vannak olyan  $\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  skalárok, **nem mindhárom nulla**, hogy  $\lambda u + \mu v + \nu w = 0$ .

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .  
Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárookra

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .  
Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges  $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárookra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$   
**CSAK ÚGY** teljesülhet,

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárookra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .



# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárookra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárookra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárookra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Vagyis  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor lineárisan független,

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárokra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Vagyis  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor lineárisan független,

ha **CSAK** a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárookra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Vagyis  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor lineárisan független,

ha **CSAK** a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például  $1, x, x^2$  lineárisan független  $\mathbb{R}[x]$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött,

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárokra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Vagyis  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor lineárisan független,

ha **CSAK** a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például  $1, x, x^2$  lineárisan független  $\mathbb{R}[x]$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött,

mert ha  $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárokra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Vagyis  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor lineárisan független,

ha **CSAK** a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például  $1, x, x^2$  lineárisan független  $\mathbb{R}[x]$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött,

mert ha  $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$  (a nullapolinom),

# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárokra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Vagyis  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor lineárisan független,

ha **CSAK** a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például  $1, x, x^2$  lineárisan független  $\mathbb{R}[x]$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött,

mert ha  $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$  (a nullapolinom),

akkor minden együttható nulla,



# Lineáris függetlenség (ismétlés)

## Definíció (Freud, 4.4. szakasz)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $v_1, \dots, v_m \in V$ .

Ezek a vektorok **lineárisan függetlenek**, ha tetszőleges

$\lambda_1, \dots, \lambda_m \in T$  skalárokra  $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m = 0$

**CSAK ÚGY** teljesülhet, ha  $\lambda_1 = \dots = \lambda_m = 0$ .

Egyébként a  $v_1, \dots, v_m \in V$  vektorok **lineárisan összefüggők**.

**Triviális** lineáris kombináció: minden együttható nulla.

Vagyis  $v_1, \dots, v_m$  akkor és csak akkor lineárisan független,

ha **CSAK** a triviális lineáris kombinációjuk nulla.

Például  $1, x, x^2$  lineárisan független  $\mathbb{R}[x]$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött,

mert ha  $a \cdot 1 + b \cdot x + c \cdot x^2 = 0$  (a nullapolinom),

akkor minden együttható nulla, azaz  $a = b = c = 0$ .

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} +$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} =$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} +$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} =$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ,

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .



## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} +$$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} =$$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} +$$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} =$$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor  $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$



## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor  $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$  és  $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$ .

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor  $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$  és  $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$ . Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

## Példák függésre és függetlenségre

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan összefüggnek.

Valóban,  $2 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + (-1) \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ , és pl.  $2 \neq 0$ .

Az  $\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$  és a  $\begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$  vektorok  $\mathbb{R}$  fölött lineárisan függetlenek.

Valóban, ha

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \lambda_1 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 \\ 3\lambda_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\lambda_2 \\ 5\lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 \end{bmatrix},$$

akkor  $2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0$  és  $3\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0$ . Ezt a homogén lineáris egyenletrendszert megoldva  $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$ .

Három térvektor pontosan akkor van egy síkban, ha összefüggők.

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen  $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ ,

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix},$$

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen  $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen  $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$



## A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen  $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

## A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

Legyen  $v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$ ,  $v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}$ ,  $\dots$ ,  $v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n$ .

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

$\dots$

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ismeretlenekre.

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer adja a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ismeretlenekre. A  $v_1, \dots, v_m$  akkor függetlenek,

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszert adja a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ismeretlenekre. A  $v_1, \dots, v_m$  akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van,

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer adja a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ismeretlenekre. A  $v_1, \dots, v_m$  akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha **nincs szabad változó**.

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer adja a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ismeretlenekre. A  $v_1, \dots, v_m$  akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha **nincs szabad változó**.

**Következmény:** Ha több vektor van, mint a vektorok magassága,



# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer adja a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ismeretlenekre. A  $v_1, \dots, v_m$  akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha **nincs szabad változó**.

**Következmény:** Ha több vektor van, mint a vektorok magassága, akkor ezek lineárisan összefüggnek

# A függetlenség eldöntése Gauss-eliminációval

$$\text{Legyen } v_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{n2} \end{bmatrix}, \dots, v_m = \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \dots \\ a_{nm} \end{bmatrix} \in T^n.$$

Ekkor a  $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m = 0$  az

$$a_{11}\lambda_1 + \dots + a_{1m}\lambda_m = 0$$

$$a_{21}\lambda_1 + \dots + a_{2m}\lambda_m = 0$$

...

$$a_{n1}\lambda_1 + \dots + a_{nm}\lambda_m = 0$$

homogén lineáris egyenletrendszer adja a  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$  ismeretlenekre. A  $v_1, \dots, v_m$  akkor függetlenek, ha ennek csak a triviális megoldása van, azaz ha **nincs szabad változó**.

**Következmény:** Ha több vektor van, mint a vektorok magassága, akkor ezek lineárisan összefüggnek (van nemtriviális megoldás).

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk.

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független,

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő,



## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa,

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő.

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.
- (6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független  $\mathbb{R}$  fölött,

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.
- (6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független  $\mathbb{R}$  fölött, ha nem párhuzamosak.

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.
- (6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független  $\mathbb{R}$  fölött, ha nem párhuzamosak.
- (7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő  $\mathbb{R}$  fölött,

## A függetlenség elemi tulajdonságai (HF)

- (1) Független vektorrendszerből vektorokat elhagyva független rendszert kapunk. Azaz független rendszer része is független.
- (2) A  $\{v\}$  egyelemű rendszer pontosan akkor független, ha  $v \neq 0$ .
- (3) A nullvektort tartalmazó rendszerek összefüggők.
- (4) Két nem nulla vektor akkor és csak akkor összefüggő, ha mindkettő a másik skalárszorosa.
- (5) Ha egy rendszerben egy vektor egy másik skalárszorosa, akkor a rendszer összefüggő. Speciálisan egy független rendszerben minden vektor csak egyszer szerepelhet.
- (6) A sík két vektora pontosan akkor lineárisan független  $\mathbb{R}$  fölött, ha nem párhuzamosak.
- (7) A tér három vektora pontosan akkor lineárisan összefüggő  $\mathbb{R}$  fölött, ha egy síkban vannak.



# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

## Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $b_1, \dots, b_n \in V$ .

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

## Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $b_1, \dots, b_n \in V$ .  
Ez pontosan akkor bázis  $V$ -ben,

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

## Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $b_1, \dots, b_n \in V$ .

Ez pontosan akkor bázis  $V$ -ben, ha  $V$  minden eleme **egyértelműen felírható** a  $b_1, \dots, b_n$  lineáris kombinációjaként.

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

## Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $b_1, \dots, b_n \in V$ .  
Ez pontosan akkor bázis  $V$ -ben, ha  $V$  minden eleme **egyértelműen felírható** a  $b_1, \dots, b_n$  lineáris kombinációjaként.

## Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött,

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

## Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $b_1, \dots, b_n \in V$ .

Ez pontosan akkor bázis  $V$ -ben, ha  $V$  minden eleme **egyértelműen felírható** a  $b_1, \dots, b_n$  lineáris kombinációjaként.

## Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor,



# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

## Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $b_1, \dots, b_n \in V$ .

Ez pontosan akkor bázis  $V$ -ben, ha  $V$  minden eleme **egyértelműen felírható** a  $b_1, \dots, b_n$  lineáris kombinációjaként.

## Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
akkor és csak akkor, ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b$

# A bázis fogalma

## Definíció (F4.5.1. Definíció)

Egy vektorrendszer **bázis**, ha lineárisan független és generátorrendszer.

## Tétel (F4.5.2. Tétel)

Legyen  $V$  vektortér a  $T$  test fölött és  $b_1, \dots, b_n \in V$ .

Ez pontosan akkor bázis  $V$ -ben, ha  $V$  minden eleme

**egyértelműen felírható** a  $b_1, \dots, b_n$  lineáris kombinációjaként.

## Példa

$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
akkor és csak akkor, ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b$  (azaz egyértelmű is).

# Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött,

# Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
akkor és csak akkor,

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$   
akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

# Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.



## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis,

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom

egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,  
azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom  
egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben.

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,  
azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom  
egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:  
 $ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2$

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,  
azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom  
egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:  
 $ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom

egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:

$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$

pontosan akkor, ha  $c = \alpha + \beta$ ,

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,  
azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom  
egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:  
 $ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$   
pontosan akkor, ha  $c = \alpha + \beta$ ,  $b = \alpha$



## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom

egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:

$$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$$

pontosan akkor, ha  $c = \alpha + \beta$ ,  $b = \alpha$  és  $a = \beta + \gamma$ ,

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom

egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:

$$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$$

pontosan akkor, ha  $c = \alpha + \beta$ ,  $b = \alpha$  és  $a = \beta + \gamma$ ,

azaz ha  $\alpha = b$ ,

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,

azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.

Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom

egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:

$$ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$$

pontosan akkor, ha  $c = \alpha + \beta$ ,  $b = \alpha$  és  $a = \beta + \gamma$ ,

azaz ha  $\alpha = b$ ,  $\beta = c - b$

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,  
azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom  
egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:  
 $ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$   
pontosan akkor, ha  $c = \alpha + \beta$ ,  $b = \alpha$  és  $a = \beta + \gamma$ ,  
azaz ha  $\alpha = b$ ,  $\beta = c - b$  és  $\gamma = a + b - c$ .

## Példák bázisra

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$  és  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  is bázis  $\mathbb{R}^2$ -ben  $\mathbb{R}$  fölött, mert  $\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

akkor és csak akkor, ha  $a = \lambda$  és  $b = \lambda + \mu$ ,  
azaz ha  $\lambda = a$  és  $\mu = b - a$  (egyértelmű megoldás  $\lambda$ -ra és  $\mu$ -re).

Legyen  $V$  a legfeljebb másodfokú polinomok vektortere  $\mathbb{R}$  fölött.  
Ebben  $\{1, x, x^2\}$  bázis, mert minden  $V$ -beli polinom  
egyértelműen felírható  $\alpha \cdot 1 + \beta \cdot x + \gamma \cdot x^2$  alakban ( $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ).

$\{1 + x, 1 + x^2, x^2\}$  is bázis  $V$ -ben. Valóban:  
 $ax^2 + bx + c = \alpha(1+x) + \beta(1+x^2) + \gamma x^2 = (\alpha + \beta) + \alpha x + (\beta + \gamma)x^2$   
pontosan akkor, ha  $c = \alpha + \beta$ ,  $b = \alpha$  és  $a = \beta + \gamma$ ,  
azaz ha  $\alpha = b$ ,  $\beta = c - b$  és  $\gamma = a + b - c$ .  
Lineáris egyenletrendszer az  $\alpha, \beta, \gamma$  ismeretlenekre.

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk.

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük. **A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).



# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.  
**A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).

(1) A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok.

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.

**A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).

- (1) A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok.
- (2) A  $T$  test feletti  $T^n$  vektortérben azon  $e_1, \dots, e_n$  vektorok, melyekre  $e_i$ -nek az  $i$ -edik komponense  $1$ , a többi nulla.

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.

**A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).

- (1) A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok.
- (2) A  $T$  test feletti  $T^n$  vektortérben azon  $e_1, \dots, e_n$  vektorok, melyekre  $e_i$ -nek az  $i$ -edik komponense  $1$ , a többi nulla.  
Speciálisan  $T$ -ben, mint önmaga feletti vektortérben az  $1$ .

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.

**A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).

- (1) A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok.
- (2) A  $T$  test feletti  $T^n$  vektortérben azon  $e_1, \dots, e_n$  vektorok, melyekre  $e_i$ -nek az  $i$ -edik komponense  $1$ , a többi nulla.  
Speciálisan  $T$ -ben, mint önmaga feletti vektortérben az  $1$ .
- (3) A  $\mathbb{C}$ -ben, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortérben az  $1$  és az  $i$ .

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.

**A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).

- (1) A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok.
- (2) A  $T$  test feletti  $T^n$  vektortérben azon  $e_1, \dots, e_n$  vektorok, melyekre  $e_i$ -nek az  $i$ -edik komponense  $1$ , a többi nulla. Speciálisan  $T$ -ben, mint önmaga feletti vektortérben az  $1$ .
- (3) A  $\mathbb{C}$ -ben, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortérben az  $1$  és az  $i$ .
- (4) A  $T^{m \times n}$  vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme  $1$ , a többi nulla

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.

**A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).

- (1) A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok.
- (2) A  $T$  test feletti  $T^n$  vektortérben azon  $e_1, \dots, e_n$  vektorok, melyekre  $e_i$ -nek az  $i$ -edik komponense  $1$ , a többi nulla. Speciálisan  $T$ -ben, mint önmaga feletti vektortérben az  $1$ .
- (3) A  $\mathbb{C}$ -ben, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortérben az  $1$  és az  $i$ .
- (4) A  $T^{m \times n}$  vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme  $1$ , a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).

# Szokásos bázis

Néhány fontos vektortérben az alábbi konkrét bázisokat sokszor használjuk. Ezeket **szokásos** bázisnak nevezzük.

**A sorrend lényeges** (koordinátázás legközelebb).

- (1) A síkon, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortéren az  $(1, 0)$ ,  $(0, 1)$  pontok.
- (2) A  $T$  test feletti  $T^n$  vektortérben azon  $e_1, \dots, e_n$  vektorok, melyekre  $e_i$ -nek az  $i$ -edik komponense  $1$ , a többi nulla. Speciálisan  $T$ -ben, mint önmaga feletti vektortérben az  $1$ .
- (3) A  $\mathbb{C}$ -ben, mint  $\mathbb{R}$  feletti vektortérben az  $1$  és az  $i$ .
- (4) A  $T^{m \times n}$  vektortérben azok a mátrixok, melyeknek egyetlen eleme  $1$ , a többi nulla (ezeket a sorfolytonosság sorrendjében tekintjük).
- (5) A  $T[x]$  legfeljebb  $n$ -edfokú elemeiből álló vektortérben az  $(1, x, x^2, \dots, x^n)$  bázis.

# A bázis elemszáma

Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.



# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük.

# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  **$\dim V$**

# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  $\dim V$  (vagy  $\dim_{\mathcal{T}} V$ ).

# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  $\dim V$  (vagy  $\dim_{\mathcal{T}} V$ ).

(1) A sík kétdimenziós  $\mathbb{R}$  fölött.

# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  $\dim V$  (vagy  $\dim_{\mathcal{T}} V$ ).

- (1) A sík kétdimenziós  $\mathbb{R}$  fölött.
- (2)  $\dim_{\mathcal{T}} T^n = n$ .

# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  $\dim V$  (vagy  $\dim_{\mathcal{T}} V$ ).

- (1) A sík kétdimenziós  $\mathbb{R}$  fölött.
- (2)  $\dim_{\mathcal{T}} T^n = n$ .
- (3)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .

# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  $\dim V$  (vagy  $\dim_{\mathcal{T}} V$ ).

- (1) A sík kétdimenziós  $\mathbb{R}$  fölött.
- (2)  $\dim_{\mathcal{T}} \mathcal{T}^n = n$ .
- (3)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .
- (4)  $\dim_{\mathcal{T}} \mathcal{T}^{m \times n} = mn$ .

# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  $\dim V$  (vagy  $\dim_{\mathcal{T}} V$ ).

- (1) A sík kétdimenziós  $\mathbb{R}$  fölött.
- (2)  $\dim_{\mathcal{T}} T^n = n$ .
- (3)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .
- (4)  $\dim_{\mathcal{T}} T^{m \times n} = mn$ .
- (5) A  $T[x]$  legfeljebb  $n$ -edfokú elemeiből álló vektortér



# A bázis elemszáma

## Tétel (F4.5.3. Tétel, bizonyítás legközelebb)

Minden vektortérben bármely két bázis elemszáma ugyanaz.

## Definíció (F4.6.1. Definíció)

A  $V$  vektortér bázisainak közös elemszámát a tér **dimenziójának** nevezzük. Jele  $\dim V$  (vagy  $\dim_T V$ ).

- (1) A sík kétdimenziós  $\mathbb{R}$  fölött.
- (2)  $\dim_T T^n = n$ .
- (3)  $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2$ .
- (4)  $\dim_T T^{m \times n} = mn$ .
- (5) A  $T[x]$  legfeljebb  $n$ -edfokú elemeiből álló vektortér  $n + 1$ -dimenziós  $T$  fölött.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Altér jellemzése zártsággal,

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).



# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).

A lineáris kombinációk alteret alkotnak,

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).

A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).

A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.

A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).

A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.

A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval.

Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével.

# Az 1. előadáshoz tartozó vizsgaanyag

## Fogalmak

A nyolc vektortéraxióma, nullelem, ellentett.

A sík és a tér mint vektortér, helyvektorok.

Altér, generált altér, generátorrendszer.

Függetlenség, bázis, dimenzió.

## Tételek

Vektorterek elemi tulajdonságai (F4.1.2).

Altér jellemzése zártsággal, altér nulleleme (F4.2.15. Feladat).

A lineáris kombinációk alteret alkotnak, ez a legszűkebb, az adott elemeket tartalmazó altér.

A függetlenség kiszámítása Gauss-eliminációval.

Bázis jellemzése a lineáris kombinációk egyértelműségével.

Bármely két bázis elemszáma ugyanaz.