

Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 8. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása

Emlékeztető: A homogén másodfokú, valós együtthatós polinomok másik neve: *valós kvadratikus alak*. Ezek általános alakja tehát $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j$. *Mátrixos felírás:* ha $u = [x_1, \dots, x_n]^T$ és $A = (a_{ij})$, akkor $Q(u) = u^T A u$.

Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ és $u^T = (x_1, x_2, x_3)$. Számítsuk ki az $u^T A u$ szorzatot.

Az a_{ij} együtthatók nem egyértelműek, mert $x_ix_j = x_jx_i$. Például $2x_1x_2 = x_1x_2 + x_2x_1 = 2x_2x_1$ ugyanaz a kvadratikus alak, de a hozzájuk tartozó mátrixok különbözők:

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezek közül csak a középső szimmetrikus (a főátlóra), vagyis teljesíti az $A^T = A$ egyenlőséget. Minden valós kvadratikus alakhoz egyértelműen tartozik egy szimmetrikus mátrix. Ennek elemeit úgy kapjuk, hogy az $(a_{ij} + a_{ji})/2$ számot írjuk a mátrixba a főátlóra szimmetrikusan.

Mi a $Q_1(x, y) = x^2 + y^2$, $Q_2(x, y) = x^2$, $Q_3(x, y) = x^2 - y^2$ alakok értékkészlete?

Nyilván $Q_1(x, y) \geq 0$, és nulla is csak akkor lehet, ha $x = y = 0$. Ezért az értékkészlet a nemnegatív valós számok halmaza. Ugyanez Q_2 értékkészlete is, de ez a nullát végtelen sok helyen felveszi (a $(0, y)$ pontokban). Végül Q_3 értékkészlete nyilván az összes valós szám. Ezért Q_1 **pozitív definit**, Q_2 **pozitív szemidefinit**, Q_3 pedig **indefinit**.

Kvadratikus alak négyzetösszeg alakjának és karakterének megállapítása.

- (1) Felírjuk a szimmetrikus mátrixát.
- (2) A mátrixot diagonalizáljuk. Ez mindig lehetséges valós sajátértékekkel.
- (3) A sajátértékekből leolvassuk a kvadratikus karaktert, vagyis az értékkészletet.
- (4) A sajátvektorokból kiválasztunk egy ortonormált bázist.
- (5) A négyzetösszeg alak együtthatói a sajátértékek, a képlet többi részét a sajátvektorok komponenseivel töltjük ki, az alábbi példák szerint.

Mi az $2x^2 + 2xy + 2y^2$, $2x^2 + 4xy + 2y^2$, $2x^2 + 6xy + 2y^2$ alakok négyzetösszeg alakja?

A három kvadratikus alak szimmetrikus mátrixa, és ezek sajátértékei a következők.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 1, 3; \quad \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = 0, 4; \quad \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \lambda = -1, 5.$$

Mindhárom esetben a normált sajátvektorok $= (1/\sqrt{2})[1, -1]$, illetve $= (1/\sqrt{2})[1, 1]$. Ezek merőlegesek, és így ortonormált bázist alkotnak. Általában is, **szimmetrikus mátrix különböző sajátértékeihez tartozó sajátvektorok ortogonálisak**. (Ha valamelyik sajátaltér több, mint egy dimenziós, akkor abban a Gram-Schmidt eljárással választhatunk ONB-t.) Az első kvadratikus alak négyzetösszeg alakja (ellenőrizzük, hogy ez azonosság):

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 = 1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{-1}{\sqrt{2}}y \right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y \right)^2$$

A két zárójel előtt a két sajátérték áll, a zárójelben az x , illetve az y együtthatói a megfelelő két sajátvektor komponensei. Ez a kifejezés mindenütt nemnegatív, és nulla csak akkor lehet, ha mindkét zárójelben nulla áll, azaz ha $x = y = 0$. Ezért az első alak pozitív definit.

A második esetben a négyzetösszeg alak

$$2x^2 + 4xy + 2y^2 = 0 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{-1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + 4 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2.$$

Ez is mindig nemnegatív, de $y = -x$ esetén nulla, és így pozitív szemidefinit. Végül

$$2x^2 + 6xy + 2y^2 = -1 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{-1}{\sqrt{2}}y\right)^2 + 5 \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}}x + \frac{1}{\sqrt{2}}y\right)^2.$$

A két zárójelben álló kifejezés **egymástól függetlenül minden értéket felvehet**, mert a két bázisvektor generátorrendszert alkot, és ezért az $(x - y)/\sqrt{2} = p$, $(x + y)/\sqrt{2} = q$ egyenletrendszer minden (p, q) párra megoldható. Ezért ez az alak indefinit, ugyanúgy az összes valós szám benne van az értékkészletében, mint a $Q_3(x, y) = x^2 - y^2$ -nak.

A $Q(x, y) = 1$ egyenlet egy kúpszeletet ad a síkon. Az első alak esetében ellipszist, a második esetben két egyenest, a harmadikban hiperbolát kapunk. Az alábbi oldalon egy animáció mutatja, hogy az $x^2 + dxy + y^2 = 1$ görbe hogyan változik d függvényében. A diagonalizálással kapott ortonormált bázis a görbe tengelyeinek irányát jelöli ki.

Négyzetösszeg alakú-e az $x^2 + y^2 + (x + y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x - y)^2$ kvadratikus alak?

Egyik sem négyzetösszeg alak, mert abban az együttthatókból képzett vektoroknak bázist kell alkotniuk. Az első felírásból így is látszik, hogy ez az alak pozitív definit.

A 7. feladatsor 2. feladatában szereplő alakok négyzetösszeg alakjai a következők.

$$x^2 - xy + y^2 = (1/2)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + (3/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2, \text{ pozitív definit.}$$

$$x^2 - 2xy + y^2 = 2\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2,$$

pozitív szemidefinit (a 0 is sajátérték).

$$x^2 - 3xy + y^2 = -(1/2)\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + (5/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2, \text{ indefinit.}$$

$$x^2 + xy = \frac{1+\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1+\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4+2\sqrt{2}}}\right)^2 + \frac{1-\sqrt{2}}{2}\left(\frac{(1-\sqrt{2})x+y}{\sqrt{4-2\sqrt{2}}}\right)^2,$$

indefinit.

$$-x^2 + 10xy - y^2 - z^2 = -6\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 - z^2,$$

indefinit.

$$xy + yz = \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x+\sqrt{2}y+z}{2}\right)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{x-\sqrt{2}y+z}{2}\right)^2,$$

indefinit (a 0 is sajátérték).

$$xy + xz + yz = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 - (1/2)\left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 - (1/2)\left(\frac{x+y-2z}{\sqrt{6}}\right)^2,$$

indefinit. Itt vigyázni kell, mert a $-1/2$ sajátértékhez tartozó sajátaltér kétdimenziós, ebben a Gram-Schmidt-eljárással adtunk meg ONB-t (ami nem is egyértelmű).

$$-x^2 + 2xy + 2xz = \left(\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}\right)^2 - 2\left(\frac{-2x+y+z}{\sqrt{6}}\right)^2, \text{ indefinit (a 0 is sajátérték).}$$