Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 8. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ és $u^T = (x_1, x_2, x_3)$. Számítsuk ki az $u^T Au$ szorzatot.

2. Írjuk föl az alábbi kvadratikus alakok szimmetrikus mátrixát, hozzuk őket négyzetösszeg alakra, és határozzuk meg a karakterüket: x^2+y^2, x^2-y^2, xy, $x^2-2xy+y^2$, x^2-xy+y^2, $x^2-3xy+y^2$, x^2+xy, $-x^2+10xy-y^2-z^2$, $xy+yz$, $xy+yz+xz$, $-x^2+2xy+2xz$.

3. Négyzetösszeg alakú-e az $x^2+y^2+(x+y)^2 = (\sqrt{3}x)^2 + (\sqrt{3}y)^2 - (x-y)^2$ kvadratikus alak? Mi a karaktere (és az értékkészlete)?

4. Legyen $A = ((a_{ij})) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$, $u^T = (x_1, x_2, x_3)$ és $v^T = (y_1, y_2, y_3)$. Számítsuk ki az u^*Av mátrix-szorzatot, továbbá a $\langle A^*u, v\rangle$ és $\langle u, Av\rangle$ skaláris szorzatokat.

5. ***(**)*** Tekintsük a $-3x\overline{x} + 4ix\overline{y} - 4i\overline{x}y + 3y\overline{y} - z\overline{z}$ kvadratikus alakot $\mathbb{C}$ felett. Írjuk fel a mátrixát, transzformáljuk négyzetösszeggé, végül határozzuk meg a karakterét.

6. ***(**)*** Igazoljuk, hogy minden komplex bilineáris függvény egyértelműen írható $B_1 + iB_2$ alakban, ahol B_1 és B_2 Hermite-féle.

7. ***(**)*** Legyen Q kvadratikus alak egy valós feletti vektortéren, $e_1, \ldots, e_n$ egy Q-ortogonális bázis, és $U = \langle e_i \mid Q(e_i) > 0\rangle$, $V = \langle e_i \mid Q(e_i) \geq 0\rangle$, $W = \langle e_i \mid Q(e_i) = 0\rangle$. E három altér közül melyek függetlenek az $e_1, \ldots, e_n$ bázistól?

8. ***(**)*** Mely valós szimmetrikus bilineáris függvényekre eleme minden nem nulla vektor egy ortogonális bázisnak?

9. ***(**)*** Legyen B nem elfajuló bilineáris függvény egy V euklideszi téren. (Ez azt jelenti, hogy minden $v \neq 0$-hoz van w, hogy $B(v,w) \neq 0$, és olyan u is, hogy $B(u,v) \neq 0$.) Igaz-e, hogy tetszőleges $v_1, \ldots, v_n$ vektorok akkor és csak akkor lineárisan függetlenek, ha a $|((B(v_i, v_j)))|$ úgynevezett Gram-determináns nullától különböző?

10. ***(**)*** Legyen B szimmetrikus bilineáris függvény egy (véges dimenziós), K test fölötti V vektortéren, $U \leq V$ pedig egy tetszőleges altér. Igazoljuk az alábbiakat:

(1) $\dim U + \dim U^\perp \geq \dim V$ mindig, és ha B nem elfajuló, akkor egyenlőség áll fenn.
(2) $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ és ha B nem elfajuló, akkor egyenlőség van.

11. ***(**)*** Legyen B egy bilineáris függvény. Bizonyítsuk be, hogy $u \perp_B v$ akkor és csak akkor szimmetrikus reláció, ha B szimmetrikus vagy alternáló. Mi a helyzet $\mathbb{C}$ fölött?

12. ***(**)*** A $P_n(x)$ Legendre-polinomok a következőképpen vannak definiálva:

$$P_0(x) := 1, \quad P_n(x) := \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n\left((x^2-1)^n\right)}{dx^n} \quad (n \geq 1).$$

Igazoljuk, hogy $\mathbb{R}[x]$-ben ezek ortogonális rendszert alkotnak az $(f,g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$ skaláris szorzatra. Bizonyítsuk be, hogy $P_n(1) = 1$ minden n-re, továbbá hogy $P_n(x)$-nek pontosan n különböző valós gyöke van, amelyek mind a $(-1,1)$ nyílt intervallumba esnek.

13. ***(**)*** Keressünk olyan skaláris szorzást az $\mathbb{R}[x]$ vektortéren, melyre a $T_n(\cos\alpha) = \cos n\alpha$ képlettel definiált Csebisev-polinomok ortogonális rendszert alkotnak.