Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 8. és 9. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása

1. Az euklideszi tér speciális transzformációi

Emlékeztető: A feladatsor elején.

A $\mathbb{C}^4$ alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad B\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_4\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix},\quad C\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\end{bmatrix},\quad E\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1-u_2\\u_2-u_3\\u_3-u_4\\u_4-u_1\end{bmatrix}.$$

Először felírjuk az $[A]$, $[B]$, $[C]$, $[D]$, $[E]$ mátrixokat:

$$\begin{bmatrix}0&0&0&0\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&0&0&1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\\1&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\\1&1&1&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&-1&0&0\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\\-1&0&0&1\end{bmatrix}.$$

Ekkor $[A^*]$ az $[A]$ transzponáltjának (elemenként való) konjugáltja. A normalitást az dönti el, hogy $[A^*][A]$ és $[A][A^*]$ egyenlők-e. Az önadjungáltságot az, hogy $[A]$ és $[A^*]$ egyenlők-e. Az unitérséget az, hogy $[A][A^*]$ az egységmátrix-e (tehát nem kell mátrixot invertálni, és elég az egyik irányban összeszorozni őket, hiszen tudjuk, hogy ha M és N ugyanakkora négyzetes mátrixok, és MN az egységmátrix, akkor NM is).

Az A transzformáció nem normális (ez abból is látszik, hogy a mátrixa egy Jordan-blokk, ezért nem ortonormált bázisban sem diagonalizálható). Tehát önadjungált, unitér sem lehet. A B unitér, így normális, de nem önadjungált (valósban ortogonális, de nem szimmetrikus). A C nem normális, de azért nem ortonormált bázisban diagonalizálható (ez egy nem merőleges vetítés). A D önadjungált, így normális, de nem unitér (valósban szimmetrikus de nem ortogonális). Az E normális, de se nem önadjungált, se nem unitér.

Tekintsük $\mathbb{R}^4$-en az alábbi transzformációkat. Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

$$F\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_4\\u_3\\u_2\\u_1\end{bmatrix},\quad G\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(u_1-u_2+u_3-u_4)/2\\(u_1-u_2-u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2+u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2-u_3-u_4)/2\end{bmatrix},\quad H\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\\u_3+u_4\\u_3-u_4\end{bmatrix}.$$

Ismét a mátrixokat kell felírni. Az F ortogonális és szimmetrikus is. A G ortogonális, de nem szimmetrikus, végül H szimmetrikus, de nem ortogonális.

A síkon a tükrözések, forgatások, vetítések közül melyek szimmetrikusak vagy ortogonálisak?

A síkon a(z origót fixáló) tükrözések, forgatások ortogonálisak, hiszen egybevágósági transzformációk, de a vetítés nem az. A tengelyes tükrözés és a merőleges vetítés szimmetrikus (a főtengely-tétel miatt, hiszen tudjuk, hogy ONB-ben diagonalizálhatók valós fölött), de a forgatás csak akkor, ha a szöge $k180°$ (vagyis amikor valósak a sajátértékek).

2. Adjungált és skaláris szorzat

Emlékeztető: $\langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle$ az adjungált transzformációt definiáló azonosság.

Igazoljuk, hogy ha $Av = \lambda v$ és $A^*w = \mu w$, akkor $\overline{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.

A feltétel szerint $\overline{\lambda}\langle v, w\rangle = \langle Av, w\rangle = \langle v, A^*w\rangle = \mu\langle v, w\rangle$, így ha $\langle v, w\rangle \neq 0$, akkor $\overline{\lambda} = \mu$.

Önadjungált A-ra ebből két dolog is következik. Ha $v \neq 0$, akkor $w = v$ és $\lambda = \mu$ választással $\langle v, v\rangle = \|v\|^2 \neq 0$ miatt $\overline{\lambda} = \lambda$, azaz önadjungált transzformáció sajátértékei valósak. De akkor az állítás azt mondja, hogy A különböző sajátértékhez tartozó sajátvektorai ortogonálisak. Fontos leszögezni, hogy ez általánosabban, normális transzformációkra is igaz.

Mutassuk meg, hogy ha $AA^* = 0$, akkor $A = 0$.

Tetszőleges v vektorra $\|A^*v\|^2 = \langle A^*v, A^*v\rangle = \langle v, AA^*v\rangle = 0$, így $A^* = 0$, azaz $A = 0$.

Igazoljuk, hogy ha A normális, akkor $\|Av\| = \|A^*v\|$ minden v vektorra.

Valóban, $\|A^*v\|^2 = \langle A^*v, A^*v\rangle = \langle v, AA^*v\rangle = \langle v, A^*Av\rangle = \langle Av, Av\rangle = \|Av\|^2$.

3. Invariáns altér

Emlékeztető: A $W \leq V$ altér *invariáns* az A transzformációra, ha A nem tud kivinni vektort W-ből, azaz $w \in W \implies Aw \in W$. *Triviális* invariáns alterek: $\{0\}$ és V. **Ha W egy A-invariáns altér, akkor $W^\perp$, vagyis az ortogonális kiegészítő altere A^*-invariáns.**

Határozzuk meg a síkon és a térben a forgatások és tükrözések nemtriviális invariáns altereit.

A síkon invariáns (origón átmenő) egyeneseket keresünk. A tükrözés tengelye és a rá merőleges egyenes is ilyen. Egy forgatásnak csak akkor van invariáns egyenese, ha helyben hagyás, vagy origóra tükrözés, ezeknek a transzformációknak minden egyenes invariáns altere.

Ha egy $v \neq 0$ vektor egy invariáns egyenesen van, akkor Av párhuzamos v-vel, és ezért v sajátvektor. Vagyis az egydimenziós invariáns alterek a sajátvektorok által generált alterek. A térben ezért csak az invariáns (origón átmenő) síkokat érdekes megkeresni. Egy egyenes körüli forgatás esetében a rá merőleges sík lesz invariáns, és ha a forgatás szöge nem 0 vagy $180°$, akkor ezen a síkon nincs is sajátvektor. (Invariáns altér a tengely is.) Egy S síkra tükrözés esetén maga S, és az S-re merőleges síkok is invariánsak lesznek.

Mik a deriválás nemtriviális invariáns alterei?

A legfeljebb k-adfokú polinomok minden k-ra, hiszen deriválásnál a fok csökken. Más invariáns altér nincs. Ha ugyanis W invariáns altér, és $f \in W$ egy k-adfokú polinom, akkor $f, f', f'', \ldots, f^{(k)} \in W$. Ez független rendszer, hiszen csupa különböző fokú polinomból áll, és ezért generálnia kell a legfeljebb k-adfokú polinomok $k+1$-dimenziós alterét.

Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere B-invariáns.

Legyen $W = \{v : Av = \lambda v\}$ a λ-hoz tartozó sajátaltere A-nak. Ha $w \in W$, akkor $Bw \in W$, azaz Bw is sajátvektor λ sajátértékkel, mert $A(Bw) = B(Aw) = B(\lambda w) = \lambda Bw$.