Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 8. és 9. prezentációhoz tartozó feladatsor

$B = A^*$ pontosan akkor, ha minden u, v vektorra $\langle Au, v\rangle = \langle u, Bv\rangle$. Az A^* mátrixa (ortonormált bázisban) az A mátrixának transzponáltja $\mathbb{R}$ felett, és az A mátrixának transzponált konjugáltja $\mathbb{C}$ felett. Az euklideszi terek speciális transzformációinak elnevezése:

	$\mathbb{R}$	$\mathbb{C}$
$A^* = A$	szimmetrikus	önadjungált
$A^* = A^{-1}$	ortogonális	unitér
$AA^* = A^*A$		normális

Egy transzformáció pontosan akkor unitér (ortogonális), ha távolságtartó, azaz ha skalárszorzattartó, azaz ha ONB-t ONB-be visz. Egy $\mathbb{C}$ feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható unitér transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha normális. Egy $\mathbb{R}$ feletti transzformáció pontosan akkor diagonalizálható ortogonális transzformációval (azaz alkalmas ONB-ben), ha szimmetrikus (ez a *főtengelytétel*). Unitér transzformáció sajátértékei egységnyi abszolút értékűek. Önadjungált transzformáció sajátértékei valósak.

1. Adjuk meg a síkon a tükrözések, forgatások, merőleges vetítések adjungáltját. Melyek lesznek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak?

2. A $\mathbb{C}^4$ alábbi transzformációi közül melyek normálisak, önadjungáltak, unitérek?

$$A\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_4\\u_1\\u_2\\u_3\end{bmatrix}, \quad C\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1\\u_1\\u_1\\u_1\end{bmatrix},$$

$$D\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\\u_1+u_2+u_3+u_4\end{bmatrix}, \quad E\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1-u_2\\u_2-u_3\\u_3-u_4\\u_4-u_1\end{bmatrix}.$$

3. Tekintsük $\mathbb{R}^4$-en az előző feladat B és D transzformációit, valamint az alábbiakat:

$$F\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_4\\u_3\\u_2\\u_1\end{bmatrix}, \quad G\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}(u_1-u_2+u_3-u_4)/2\\(u_1-u_2-u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2+u_3+u_4)/2\\(u_1+u_2-u_3-u_4)/2\end{bmatrix}, \quad H\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}u_1+u_2\\u_1-u_2\\u_3+u_4\\u_3-u_4\end{bmatrix}.$$

Melyek szimmetrikusak, illetve ortogonálisak? A szimmetrikusakhoz adjunk meg ortonormált sajátbázist, az ortogonálisakhoz pedig olyan bázist, amelyben a mátrixra az előadáson szerepelt tételnek megfelelő, forgatásokat és ± 1-et tartalmazó blokkokra bomlik.

4. ***(**)*** Bizonyítsuk be az alábbiakat.

(1) Ha $Av = \lambda v$ és $A^*w = \mu w$, akkor $\overline{\lambda} = \mu$ vagy $v \perp w$.
(2) $\operatorname{Ker} A^* = (\operatorname{Im} A)^\perp$ és $\operatorname{Im} A^* = (\operatorname{Ker} A)^\perp$.
(3) $AA^* = 0 \implies A = 0$.
(4) $A^*B = 0 \implies \operatorname{Im}(A) + \operatorname{Im}(B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B$.
(5) $A^*B = BA^* = 0 \implies \operatorname{Im}(A + B) = \operatorname{Im} A \oplus \operatorname{Im} B$.

5. *(**)* Igazoljuk, hogy ha A és B önadjungált, akkor AB pontosan akkor önadjungált, ha $AB = BA$.

6. *(**)* Mutassuk meg, hogy egy normális transzformáció sajátalterei páronként merőlegesek. Igaz-e a megfordítás?

7. *(**)* Igaz-e, hogy ha két normális transzformáció felcserélhető, akkor megegyeznek a sajátvektoraik? Igaz-e a megfordítás?

8. *(**)* Mutassuk meg, hogy az A transzformáció akkor és csak akkor normális, ha tetszőleges v vektorra $\|Av\| = \|A^*v\|$ teljesül.

9. *(**)* Mutassuk meg, hogy egy transzformáció akkor és csak akkor merőlegességtartó, ha egy unitér (illetve ortogonális) transzformáció skalárszorosa.

10. *(**)* Bizonyítsuk be, hogy ha A ortogonális és szimmetrikus, akkor A^2 az identitás. Megfordítható-e ez az állítás?

11. *(**)* Igazoljuk, hogy A akkor és csak akkor normális, ha A^* polinomja A-nak.

12. *(**)* Határozzuk meg a valós euklideszi síkon az összes normális transzformációt.

13. *(**)* Igazoljuk, hogy minden $\mathbb{C}$ feletti lineáris transzformáció felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, és hogy egy transzformáció pontosan akkor normális, ha felírható egy unitér és egy önadjungált transzformáció szorzataként, melyek felcserélhetők.

---

14. *(*)* Legyen T a sík egy transzformációja, ami nem nyújtás. Igazoljuk, hogy ha T diagonalizálható, akkor négy invariáns altere van; ha nincs valós sajátértéke, akkor kettő; különben pedig három. Adjunk meg a térben egy olyan lineáris transzformációt, melynek van olyan kétdimenziós invariáns altere, ami nem sajátaltér.

15. *(*)* Mutassuk meg, hogy A minden sajátalterének minden altere, továbbá $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ is A-invariáns altér.

16. *(*)* Legyen A a deriválás a legfeljebb harmadfokú polinomok terén. Határozzuk meg A invariáns altereit.

17. *(*)* Határozzuk meg egy 4×4-es Jordan-blokk invariáns altereit. Függ-e a válasz attól, hogy mi a blokkban szereplő sajátérték?

18. *(*)* Milyen kapcsolatban állnak A és A^* karakterisztikus polinomja, minimálpolinomja, sajátértékei, sajátalterei, invariáns alterei?

19. *(*)* Melyek azok a transzformációk, melyekre minden altér invariáns?

20. *(*)* Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\mathrm{Im}(A)$ és $\mathrm{Ker}(A)$ is B-invariáns altér.

---

21. *(**)* Jelölje $J_{\lambda,k}$ a $k \times k$-as, λ sajátértékű Jordan-blokkot.

(1) Melyek azok a $k \times k$-as mátrixok, amelyek felcserélhetőek $J_{\lambda,k}$-val?
(2) Tegyük föl, hogy az $M \in \mathbb{C}^{k\times k}$ mátrix Jordan-normálalakja egyetlen blokkból áll. Igazoljuk, hogy az M-mel felcserélhető mátrixok halmaza $\{p(M) \mid p \in \mathbb{C}[x]\}$.
(3) Igazoljuk a fenti állítás megfelelőjét abban az általánosabb esetben, amikor M minden sajátértéke csak egy Jordan-blokkban fordul elő.
(4) És általában $\{A \in \mathbb{C}^{k\times k} \mid AM = MA\} =$?