

Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat
A 7. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása

1. SKALÁRIS SZORZAT, NORMA, SZÖG

Emlékeztető a hatodik feladatsor elején található.

1. *Határozzuk meg az alábbi két pontpár távolságát: $(0, 1, 1)$ és $(1, 0, 1)$; $(1, 1, i)$ és $(0, i, 1)$. Számítsuk ki az első két vektor szögét és a második két vektor skaláris szorzatát is.*

Két pont távolsága a különbségvektor hossza, azaz normája. A $(0, 1, 1)$ és $(1, 0, 1)$ távolsága $\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{2}$ (az egységkocka lapátlójának a hossza). A komplex esetben ne felejtsük el az abszolút értéket: $\sqrt{|1-0|^2 + |1-i|^2 + |i-1|^2} = \sqrt{5}$. A keresett szög koszinusza $(0 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1) / (\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}) = 1/2$, tehát a szög 60 fok. A skaláris szorzásnál az első tényezőt kell konjugálni: $\bar{1} \cdot 0 + \bar{1} \cdot i + \bar{i} \cdot 1 = 0$, azaz $(1, 1, i) \perp (0, i, 1)$.

2. *Igazoljuk, hogy $b_1 = (1, 1)/\sqrt{2}$ és $b_2 = (1, -1)/\sqrt{2}$ ONB \mathbb{C}^2 -ben is. Adjuk meg ebben $(1, 2)$ és $(1, i)$ koordinátáit, majd számítsuk ki a hosszukat a régi és az új koordinátákból is.*

Páronként ortogonális, nem nulla vektorokból álló rendszer független, így csak azt kell ellenőrizni, hogy a két vektor hossza 1, és skaláris szorzatuk nulla. Ha $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, akkor

$$[(1, 2)]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \langle b_1, (1, 2) \rangle \\ \langle b_2, (1, 2) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \quad \text{és} \quad [(1, i)]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \langle b_1, (1, i) \rangle \\ \langle b_2, (1, i) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1+i)/\sqrt{2} \\ (1-i)/\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Mivel \mathbb{C} fölött számít a skaláris szorzásnál a sorrend, figyeljünk arra, hogy a fenti képletekben **a bázisvektor az első tényező**. Másik fontos észrevétel: *a hossz bármely ONB-ben ugyanaz, $\sqrt{5}$, illetve $\sqrt{2}$. Pl. $|(1+i)/\sqrt{2}|^2 = |(1-i)/\sqrt{2}|^2 = 1$, ezért $\|(1, i)\|_{\mathbf{b}} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$.*

3. *Igazoljuk valós euklideszi térben az alábbi állításokat. Mely közismert geometriai tételek általánosításai? Melyek igazak komplex felett is? (1) $x \perp z \iff \|x+z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$. (2) $\|x\| = \|z\| \iff x+z \perp x-z$. (3) $\|x+z\|^2 + \|x-z\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|z\|^2$.*

(1): Pitagorasz tétele; \mathbb{C} fölött \Rightarrow igaz, \Leftarrow nem. (2): A rombusz átlói merőlegesek; \mathbb{C} fölött \Leftarrow igaz, \Rightarrow nem. Ellenpélda mindkettőre: $x = (1, 0)$, $z = (i, 0)$. (3): A paralelogramma átlóinak a négyzetösszege egyenlő az oldalainak a négyzetösszegével; \mathbb{C} fölött is igaz.

Mintabizonyítás (2)-re: $\langle x+z, x-z \rangle = \langle x, x \rangle - \langle x, z \rangle + \langle z, x \rangle - \langle z, z \rangle$. Valós fölött $\langle x, z \rangle = \langle z, x \rangle$, ezért ez $\langle x, x \rangle - \langle z, z \rangle = \|x\|^2 - \|z\|^2$. Ez akkor nulla, ha $\|x\| = \|z\|$.

4. *Mennyi $a + 2b + 3c + 4d$ maximuma, ha $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$?*

Használjuk a Cauchy-egyenlőtlenséget a $v = (1, 2, 3, 4)$ és $w = (a, b, c, d)$ vektorokra. Azt kapjuk, hogy $|a + 2b + 3c + 4d| = |\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \|w\| = \sqrt{30} \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2} = \sqrt{30}$. Be kell látni, hogy ez elérhető. A Cauchy-egyenlőtlenségben akkor áll egyenlőség, ha a két vektor párhuzamos, így $(a, b, c, d) = \lambda(1, 2, 3, 4)$ kell, hogy teljesüljön. Mivel (a, b, c, d) a feltétel szerint egységvektor, $\lambda = \pm(1/\sqrt{30})$. Továbbá $\langle v, w \rangle$ pozitív kell, hogy legyen, hiszen a Cauchy-egyenlőtlenségben abszolút érték van. A $w = (1/\sqrt{30})(1, 2, 3, 4)$ választás a megfelelő.

(A legtöbb nevezetes egyenlőtlenség alkalmas szélsőérték-feladatok elegáns megoldására.)

2. ORTOGONALIZÁCIÓ

Gram-Schmidt eljárás: Ha b_1, \dots, b_k már megvan, akkor $b = v - \langle b_1, v \rangle b_1 - \dots - \langle b_k, v \rangle b_k$ és $b_{k+1} = b/\|b\|$. **Figyeljünk arra, hogy v -t mindig a megfelelő altérből vegyük.**

5. Legyen W a térben az $x + y - z = 0$ egyenletű sík. Adjunk meg W -ben a Gram-Schmidt-eljárással egy ortonormált bázist, és ezt egészítsük ki a tér egy ortonormált bázisává.

Az első vektort bárhogyan vehetjük a W altérből, a számolást gyorsítja, ha van nulla komponense. Például legyen $v = (1, 0, 1)$. A b_1 -et úgy kapjuk, hogy ezt elosztjuk a hosszával, azaz $\sqrt{2}$ -vel. A második lépésben egy újabb $v \in W$ vektort kell venni, olyat, ami a már megkonstruált bázisvektoroktól nem függ. (Ha véletlenül olyat vennénk, ami függ tőlük, akkor a Gram-Schmidt képletében $b = 0$ jön ki. Ilyenkor másik v -t kell választani.)

Legyen $v = (0, 1, 1) \in W$. Ekkor

$$b = v - \langle b_1, v \rangle b_1 = (0, 1, 1) - \frac{1}{\sqrt{2}}(1 \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 1 \cdot 1) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = (-1/2, 1, 1/2).$$

Érdeemes ellenőrizni, hogy a kapott $b \in W$, továbbá hogy $b \perp b_1$. A b normálásához vegyük észre, hogy b normáltja ugyanaz, mint λb normáltja, bármely $\lambda > 0$ skalárra. Ezért kényelmesebb b helyett $2b$ -t normálni, mert akkor nem kell törtekkel számolni. Az eredmény $b_2 = (1/\sqrt{6})(-1, 2, 1)$. Tehát b_1 és b_2 a W síkon ortonormált bázist alkot.

Ha még egy lépést teszünk, pl. $v = (1, 0, 0)$ választással (ez a vektor már nincs W -ben), akkor $b_3 = (1/\sqrt{3})(1, 1, -1)$ adódik. Ekkor b_1, b_2, b_3 ONB \mathbb{R}^3 -ben.

A W sík egyenlete $0 = x + y - z = \langle (x, y, z), (1, 1, -1) \rangle$, ezért W az $(1, 1, -1)$ -re merőleges vektorokból áll. Ennek normáltja (ami most b_3) a W sík **normálvektora**. Vagyis b_3 közvetlenül leolvasható W egyenletéről.

6. Álljon a $W \leq \mathbb{R}^4$ altér azokból a vektorokból, melyek koordinátaösszege nulla. Határozzuk meg az $(1, 2, 3, 4)$ pont távolságát ettől a „hipersík”-tól.

$b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $b_3 = (1/2, 1/2, -1/2, -1/2)$ ONB W -ben. Az ortogonalizációt $(1, 2, 3, 4)$ -gyel folytatva $w = (5/2, 5/2, 5/2, 5/2)$, aminek a hossza, és így a keresett távolság 5 és $b_4 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ (lásd az összefoglalót a feladatsoron).

Második megoldás: A W altér a $v = (1, 1, 1, 1)$ vektorra merőleges vektorok halmaza. Legyen $(1, 2, 3, 4) = \lambda(1, 1, 1, 1) + u$, ahol $u \in W$. Ezt skalárisan v -vel szorozva $v \perp u$ miatt $1 + 2 + 3 + 4 = 4\lambda$, ahonnan $\lambda = 5/2$ és $u = (-3/2, -1/2, 1/2, 3/2)$. Az $(1, 2, 3, 4)$ távolsága W -től (azaz a W -re vett merőleges vetületétől) a λv hossza, azaz 5. **Ha W egy olyan altér, aminek a dimenziója eggyel kisebb a tér dimenziójánál, és W normálvektora n , akkor a v távolsága W -től $|\langle v, n \rangle|$ (ne felejtsük le az abszolút értéket).**

7. Legyen $U \leq \mathbb{R}^4$ azon vektorok halmaza, melyekben az első két koordináta összege egyenlő az utolsó két koordináta összegével. Adjunk meg U -ban egy ONB-t, határozzuk meg U^\perp elemeit, végül írjuk fel az $(1, 0, 0, 0)$ vektort egy U -beli és egy U^\perp -beli vektor összegeként.

$b_1 = (1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}, 0, 0)$, $b_2 = (0, 0, 1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $b_3 = (1/2, 1/2, 1/2, 1/2)$ egy ONB U -ban. Az U^\perp alteret az U normálvektora generálja, elemei $(\lambda, \lambda, -\lambda, -\lambda)$. A keresett felbontás $(1, 0, 0, 0) = (1/4)(3, -1, 1, 1) + (1/4)(1, 1, -1, -1)$.

8. Igazoljuk, hogy ha b_1, b_2, b_3, b_4 ONB, akkor $\langle b_1, b_2 \rangle^\perp = \langle b_3, b_4 \rangle$.

Ha $v = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2 + \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$, akkor $\langle b_1, v \rangle = \lambda_1$ és $\langle b_2, v \rangle = \lambda_2$. Tehát $v \perp \langle b_1, b_2 \rangle$ akkor és csak akkor, ha $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, azaz ha $v = \lambda_3 b_3 + \lambda_4 b_4$.