M adott mátrix $n \times n$ — $(-1)^n$ főegyüttható és n. fokú

$\det(M - xE) = k(x)$ — konstans tag $\Rightarrow$ det $=$ s.é. szorzata

$x \to 0$ $\quad \det(M) = k(0) =$ konstans tag.

$k(x) = \underline{(-1)^n (x-\lambda_1) \dots (x-\lambda_n)}$ $\quad \lambda_1, \to \lambda_n$ s.é. mult. számolva.

$k(0) = (-1)^n(-\lambda_1) \dots (-\lambda_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n.$

---

x^{n-1} együtthatója

M NYOMA $=$ főátló elemeinek összege.

s.é. összege.

$\det \begin{bmatrix} a_{11} - x & & * \\ & \ddots & \\ * & & a_{nn} - x \end{bmatrix}$

x^{n-1}, x^n

$(a_{11} - x) \dots (a_{nn} - x) \quad ss = 1$

$\forall$ más tagban az $n!$ tag közül

$\leq x^{n-2}$ lehet!

$x^{n-1} : (-1)^{n-1} (a_{11} + \dots + a_{nn})$

nyom.

geo ≤ alg mult. $\quad A \in \mathrm{Hom}(V)$

λ-hoz tart. s. altér k-dim

$b_1, \ldots, b_k$ bázis.

$b_{k+1} \ldots b_n$ tér bázisa

$$[A]_{\underline{b}} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} b_1 & \ldots & b_k \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} \lambda & & 0 & \\ & \ddots & & * \\ 0 & & \lambda & \\ \hline & 0 & & * \end{array}\right] \end{array} - xE.$$

$\det([A] - xE)$ első k oszlop szerint kifejtjük $(\lambda - x)^k \cdot$ valami. $= k(x)$

$\Rightarrow \lambda \geq k$-szoros gyök.

$M^k = E \Rightarrow M$ diag.-ható $\mathbb{C}$ felett!!!

↳ gyöke $x^k - 1$-nek

[↑ $\forall$ gyöke egyszeres!

$= \prod (x - \varepsilon)$.
$\varepsilon^k = 1$

$m_M(x) \mid x^k - 1 \Rightarrow$ mind tiszta gyök.

Pl 90° forg $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^4 = E$, $\mathbb{R}$ felett nem diag.

$x^2 + 1$ a minpol!

M $n \times n$ és $M^k = 0 \Rightarrow M^n = 0$.

$\Rightarrow M$ gyöke x^k-nak

Cayley-Ham-ből.

$\Rightarrow m(x) \mid x^k \Rightarrow$

$\Rightarrow m(x) = x^m$ $(m \leq k)$. $m(x) \mid k(x) \Rightarrow \in$ n. fokú

$\Rightarrow m \leq n \Rightarrow M^n = 0$.

Cayley-Ham. tét-a ezen múlik. $A \in \mathrm{Hom}(V)$

Elemi tét. $A^k = 0 \Rightarrow A^n = 0$ $n = \dim$.

$$\underset{}{V} \geq \underbrace{A(V)}_{=\,\mathrm{Im}\,A} \geq \underbrace{A(A(V))}_{\mathrm{Im}\,A^2} \geq \dots \geq A^k(V) = 0$$

HF: Mindenhol valódi a tartalmazás!

Ha $\mathrm{Im}(A^m) = \mathrm{Im}(A^{m+1})$

$\Rightarrow$ ott megáll! akkor $\mathrm{Im}(A^{m+1}) = \mathrm{Im}(A^{m+2}) = \dots$

$\Rightarrow \leq n$ lépésben leérünk.

M invertálható $\Rightarrow$ M^{-1} pol-ja M-nek.

$\frac{k(x)}{m(x)}$ M invertálható-e?

$\frac{k(x)}{m(x)}$ gyökei a sajátértékek. konstans tag $\neq 0$.

$\Updownarrow$

$\det = $ s.é. szorzata $\neq 0$ $\Longleftrightarrow$ M^{-1} létezik.

$\Updownarrow$

nincs 0 s.é. (ugyanis $\neq 0$)

"0-les konstans s. állna."

$m(x) = x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$a_0 \neq 0$

$0 = m(M) = M^k + a_{k-1}M^{k-1} + \ldots + a_1 M + a_0 E \quad / \cdot M^{-1}$

$\Downarrow$

$-\frac{1}{a_0} M^{k-1} - \frac{a_{k-1}}{a_0} M^{k-2} \ldots = M^{-1}$

$(0,1,1)$, $(1,0,1)$

távolságuk $\|(0,1,1)-(1,0,1)\| = \|(-1,1,0)\| =$

$\sqrt{(-1)^2+1^2+0^2} = \sqrt{2}$ 0, u, v szabályos $\triangle$. oldala $\sqrt{2}$.

sk. szorzat : $0\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 1 = 1$

Hossza : $\|(0,1,1)\| = \sqrt{2} = \|(1,0,1)\|$

$$\cos\alpha = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|} = \frac{1}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = 1/2 \Rightarrow \alpha = 60°.$$

$v = (1,1,i)$ és $(0,i,1) = w$

$\sqrt{\bar{1}\cdot 1 + \bar{1}\cdot 1 + \bar{i}\cdot i} = \sqrt{3}$ $\sqrt{|0|^2+|i|^2+|1|^2} = \sqrt{2}$.

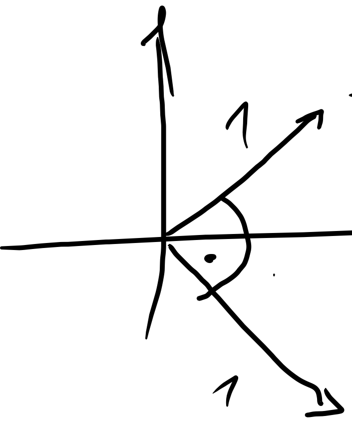
$|1|^2 + |1|^2 + |i|^2$

$\langle v,w\rangle = \bar{1}\cdot 0 + \bar{1}\cdot i + \bar{i}\,1 =$

$\bar{z}z = |z|^2$

$= 0 + i - i = \underline{\underline{0}}$

$v \perp w$.



$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1) = b_1$

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1) = b_2$

$$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{\pm 1}{\sqrt{2}}\right)^2} = 1$$

b_1, b_2 ONB

$$\langle (1,1), (1,-1) \rangle = 0.$$

$v = (1, i)$

$$[v]_{\underline{b}} = \begin{bmatrix} \langle b_1, v \rangle \\ \langle b_2, v \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1), (1,i) \rangle \\ \langle \frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1), (1,i) \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 1 + \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, i \\ \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}} \cdot 1 - \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}}\, i \end{bmatrix}$$

$$= \underline{\underline{\begin{bmatrix} \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-i}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}}}$$

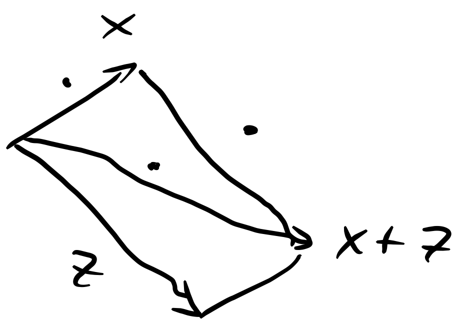
<u>Ell.</u> $\frac{1+i}{\sqrt{2}} b_1 + \frac{1-i}{\sqrt{2}} b_2 = (1, i)$ HF.

$$\longrightarrow \|v\| = \sqrt{\left|\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right|^2 + \left|\frac{1-i}{\sqrt{2}}\right|^2} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}. \checkmark$$

$$\|v\| = \sqrt{|1|^2 + |i|^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}} \checkmark$$ stdásos bázissal számolva

(1) $x \perp z \iff \|x+z\|^2 = \|x\|^2 + \|z\|^2$

Pit.-tétel.



$$\|x+z\|^2 = \langle x+z, x+z\rangle =$$
$$= \langle x,x\rangle + \langle x,z\rangle + \langle z,x\rangle + \langle z,z\rangle$$
$$= \|x\|^2 + 2\langle x,z\rangle + \|z\|^2.$$

ℝ fölött

$\Rightarrow$ Ha $x \perp z \Rightarrow \langle x,z\rangle = 0 \Rightarrow$ igaz.

$\Leftarrow$ $2\langle x,z\rangle = 0 \Rightarrow x \perp z$.

ℂ felett baj lehet: $\langle x,z\rangle + \underset{\overline{\langle x,z\rangle}}{\underset{\shortparallel}{\langle z,x\rangle}} = 0$ jön ki

csak az jön ki, hogy

$2\,\mathrm{Re}\,\langle x,z\rangle = 0. \not\Rightarrow \langle x,z\rangle = 0.$

$\mathbb{C}^1$-ben $x=1$, $z=i$ ellenpélda.

(2),(3) HF.

$a^2+b^2+c^2+d^2=1$ 4-dim gömbhéj.

$a+2b+3c+4d$ max = ?

Számtani-mért → szélsőértékfeladat.

CBS $|\langle u,v\rangle| \le \|u\|\,\|v\|$

egyenlőség $\iff$ $u \parallel v$.

$u=(a,b,c,d)$

$v=(1,2,3,4)$

$$|a+2b+3c+4d| \le \underbrace{\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}}_{=1}\ \underbrace{\sqrt{1^2+2^2+3^2+4^2}}_{\sqrt{30}} =$$

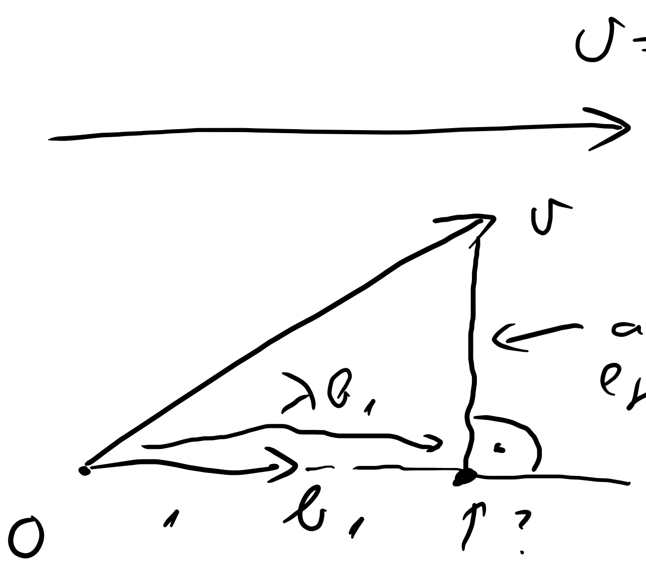
elérhető $\sqrt{30}$?

$(a,b,c,d) \parallel (1,2,3,4)$

$\frac{1}{\sqrt{30}}(1,2,3,4)$-nél egyenlőség $\Rightarrow$ felveszi $\sqrt{30}$-at.

W $\quad x+y-z=0$ egyenletű sík.

ONB W-ben, kiegészíteni a tér ONB-vé!



a cél egy b_1-re $\perp$ vektor.

$\lambda = ?$

$$b_1 = \frac{1}{\|v\|} \cdot v$$

$b_1 \perp v - \lambda b_1$ kellene

$$0 = \langle b_1, v - \lambda b_1 \rangle = \langle b_1, v \rangle - \lambda \underbrace{\langle b_1, b_1 \rangle}_{=1} \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \langle b_1, v \rangle}}$$

$$v - \underbrace{\lambda}_{=\langle b_1, v \rangle} b_1 \perp b_1 \qquad b_2 = v - \langle b_1, v \rangle b_1$$

$\to$ lenormálni!

$$x + y - z = 0$$

dir $(1,0,1) \rightsquigarrow b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1)$

$v = (0,1,1)$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{2}}(1\cdot 0 + 0\cdot 1 + 1\cdot 1) = 1/\sqrt{2}$

$v - \langle b_1, v\rangle b_1 =$

$= (0,1,1) - \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}}(1,0,1) = (0,1,1) - (1/2, 0, 1/2)$

$= (-1/2, 1, 1/2) = b.$ $\qquad b/\|b\|$ kellene.

Trükk: $v \to 2v$ $\qquad \frac{1}{\sqrt{6}}(-1,2,1) = b_2.$

$v/\|v\| = \frac{2v}{\|2v\|}$

$-1+2-1 = 0$ ✓ $\in W$

Ell: $b_1 \perp b_2$ $\qquad 1\cdot(-1) + 0\cdot 2 + 1\cdot 1 = 0$ ✓

$b_2 \in W$ $\qquad b_1 \perp b_2$ ✓

b_3 ? Még egy G-S lépés HF!!

Alternatív út

$b_3 \perp b_1, b_2$ azaz $b_3 \perp W$

W $$x + y - z = 0$$

$$\langle (1,1,-1), (x,y,z) \rangle$$

ez a $\perp$ vektor!!!

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,-1) = b_3$$ jó lesz!

W normálvektora.

Pont távolsága a síktól: HF. Köv. óra elején.