$$\det \begin{bmatrix} 2-x & 1 \\ -1 & 0-x \end{bmatrix} = (2-x)(-x) - (1)(-1) =$$
"M"

$$= x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 = k(x).$$

gyökei 1, 2-szeres.

Normált osztók?

4 osztói $\quad 4 = 2^2 \quad$ poz. osztói $\quad 2^k, \ 0 \le k \le 2$

$1, 2, 4$

$(x-1)^2$ osztói (normált) $\quad (x-1)^0, \ (x-1)^1, \ (x-1)^2$

$\cancel{1} \quad \cancel{x-1} \quad \boxed{(x-1)^2} = m(x)$

mellesleg 1 nem gyöke.

Melyiknek gyöke M?

1-be M-et helyettesítünk $1 \cdot E \neq 0$,

$x-1$ — " — $M - E \overset{?}{=} 0 \quad M \neq E$ NEM

k(x)-be nem kell helyettesíteni, mert annak biztosan gyöke.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad \det \begin{bmatrix} 2-x & 0 & 0 \\ 1 & 2-x & 0 \\ 0 & 0 & 2-x \end{bmatrix} = (2-x)^3$$

(A-mátrix!)

A megoldás pol.-ban $(x-2)^3$ van, az számít!!
(de nem nagy, ebből is megkapjuk jól :)

$(2-x)^3$ minimál osztói: $\cancel{1}$, $\cancel{x-2}$, $\boxed{(x-2)^2}$, $(x-2)^3$

2 nem elég

$M-2E \neq 0$

$(x-2)^2 \longrightarrow (M-2E)^2$

(Nem kell beszorozni, így is be tudod helyettesíteni)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{M-2E}$$

blokkonként lehet négyzetre emelni!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \checkmark \Rightarrow m(x) = (x-2)^2.$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad k(x) = (2-x)^2(3-x)$$

normált osztói:

$\cancel{1}$, $\cancel{x-2}$, $\cancel{(x-2)^2}$

$\cancel{x-3}$, $\boxed{(x-2)(x-3)}$, $(x-2)^2(x-3)$

(Hf: $2^2 \cdot 3$ osztói)

Zöldeket kilőttem, amiben nem szerepel 2 vagy 3

$$(M-2E)(M-3E)$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{0} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{0} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{-1} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} = \underline{\underline{0}}$$

$$m(x) = (x-2)(x-3)$$

skalárszorzat szorozva

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad k(x) = (2-x)^2(3-x)$$

normált alakú, amiknek gyöke 2 és 3:

$(x-2)(x-3)$ $\qquad \boxed{(x-2)^2(x-3)} \to m(x).$

$\to$ most nem gyöke M

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0$$

$$[1, 0] \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \qquad k(x) = (2-x)^2(3-x)$$

Stába jön: $(x-2)^2(x-3)$

$$\boxed{(x-2)(x-3)} \to m(x)$$

$$M-2E \qquad M-3E$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = 0 \ !$$

$$\boxed{M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \quad x-\lambda}$$

M 2×2 min. pol $= ?$

1. fokú $\sim$ $x-\lambda$ ha M $\qquad M - \lambda E = 0$

2. fokú Minden más esetben

$\Rightarrow \quad m(x) = k(x).$

$X^4 = 2X \qquad X \in \mathbb{Q}^{2\times 2} \qquad X = ?$

$X = 0$ jó

$\begin{bmatrix} \sqrt[3]{2} & 0 \\ 0 & \sqrt[3]{2} \end{bmatrix}$ jó, csak nem rac.

$\boxed{X=0}$

$\Uparrow$

$m_X(x) = x$

$\Uparrow$

$\geq 2.$ fokú!

$X = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \qquad \underbrace{X^4 = 2X}$

4 ismeretlen
4. fokú, 4 egyenlet

X gyöke a $x^4 - 2x$ polinomnak

Tétel: $f(M) = 0 \iff m_M \mid f$

6 osztói: 1, 2, 3, 6

$m_X(x) \mid x^4 - 2x = \underbrace{x^1 (x^3-2)^1}$

≤ 2 fokú

rac. együtthatós.

$\cancel{1}$, x, $\cancel{x^3-2}$, $\cancel{x(x^3-2)}$

És $x - \sqrt[3]{2}$????

↳ $\mathbb{Q}$ fölött irred! Sch-E!

$k(x) = x^4 - x^2$ $\longrightarrow$ 4×4 (V/3.)

$= x^2(x-1)(x+1)$

$m(x)$

$\cancel{x^2 - x}$

$x^3 - x$

$x^4 - x^2$

$m(x)$ és $k(x)$ gyökei ugyanazok

diag mátrixot?

$x(x-1)(x+1)$

HF Jordan!

IGEN.

$$\begin{bmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}_{4 \times 4}$$

jó

főátlóban $1, 0, -1$

0 2-szer, mert $k(x)$-nek kétszeres gyöke.

$$\begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 \\ 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{2} \end{bmatrix} \leftarrow$$

$\lambda = 2$

van 2×2

nincs 3×3

$\Rightarrow m(x) = (x-2)^2$

Jordan-alak? Önmaga.

$$\boxed{\begin{matrix} \lambda & & 0 \\ 1 & \ddots & \\ 0 & \ddots & \lambda \end{matrix}}$$

Jordan-alak min. pol.:

$\forall \lambda$ s.é. $(x-\lambda)^k$

& a legnagyobb olyan,

amire van $k \times k$-as λ-s blokk.

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{2} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix}$$

Jordan-alak!

$m(x) = (x-2)(x-3)$.

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{3} \end{bmatrix} \qquad m(x) = \underbrace{(x-2)^2}_{2\times 2}\ \underbrace{(x-3)}_{1\times 1} \quad \checkmark$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{2} \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} k(x) &= (2-x)^2(3-x) \\ m(x) &= (x-2)(x-3) \end{aligned}$$

NEM Jordan-blokk

Jordan-alak
3 db 1×1-es blokk
(azaz diag)

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & & \\ & \boxed{3} & \\ & & \boxed{2} \end{bmatrix}$$

2 db 2-es van
mert $k(x)$-ben a 2 a kétszeres gyök.

$$M_1 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \begin{matrix} \boxed{2} & 0 \\ 0 & \boxed{2} \end{matrix} \end{bmatrix}$$

$k(x) = (2-x)^4$

$m(x) = (x-2)^2$

$$M_2 = \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} & \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix} & \boxed{\begin{matrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}} \end{bmatrix}$$

rang!

4 a rangja

az sem segít

<u>Trükk:</u> $M_1 - 2E$ $\quad M_2 - 2E$ rangja nem ugyanaz!

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$r = 1$ $\qquad r = 2$

K-ra kijön

$K - 2E$ rangja segít.

$X \sim Y$

HF. $\Leftrightarrow X - 2E \sim Y - 2E$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_1 \qquad M_1^2 = 0 \leftarrow m(x) = x^2$$

2×2

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 0 & \\ 1 & 0 & \\ \hline & & 0 \end{array}\right]$$

$l(x)$ nicht

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_2 \qquad M_2^2 = 0$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad M_3 \qquad M_3^2 \neq 0 \qquad \boxed{x^3}$$

$\exists$ 3×3 soll

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$k(x) = -x^3$$

$$x,\ x^2,\ x^3$$

$\to 0$ nicht

Ha $m_M(x) \Rightarrow \underset{0}{\underset{\parallel}{m_M(M)}} = M$ $\qquad \underline{\underline{M=0}}$

2x2 M Jordan

$$M = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$ $\leftarrow$ Jordan alak!

$m(x) = x - \lambda$

$k(x) = (x-\lambda)^2$

Ha nem $\Rightarrow$ $m(x) = k(x) = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$

Ha $\lambda_1 \neq \lambda_2$ $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ diag-ható

Ha $\lambda_1 = \lambda_2$ $\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 1 & \lambda_1 \end{bmatrix}$

$m(x)$ most 2 fokú $(x-\lambda_1)^2$

$\Rightarrow \exists$ 2x2 blokk

V/1 utolsó sora

2 mátrix hasonló $\Leftrightarrow$ Jordan-alakjuk ugyanaz

HF (a blokkok sorrendjétől eltekintve).