

Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

Az 5. és 6. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. Határozzuk meg a 4. feladatsor első feladatában szereplő mátrixok és transzformációk; egy általános diagonális mátrix; valamint az alábbi mátrixok minimálpolinomját, rangját és Jordan-alakját. Az utolsó sor mátrixai közül melyek hasonlóak?

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -3 & -4 & 1 \\ 6 & 9 & -2 \\ 15 & 24 & -5 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Melyek azok az A lineáris transzformációk a síkon, melyekre $m_A(x)$ elsőfokú, illetve melyekre $m_A(x) \neq k_A(x)$? Hogyan látszik a minimálpolinomról, hogy a transzformációnak létezik inverze? Hogyan olvasható le a rang a Jordan-alakról?

3. Van-e olyan mátrix, amelynek a karakterisztikus polinomja $x^4 - x^2$ és a minimálpolinomja (a) $x^2 - x$; (b) $x^3 - x$; (c) $x^4 - x^2$?

4. Mutassuk meg, hogy ha $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$ és $\exists k M^k = E$, akkor M diagonalizálható.

5. (*) Igazoljuk, hogy egy $\mathbb{Q}^{n \times n}$ -beli mátrix minimálpolinomja ugyanaz \mathbb{Q} és \mathbb{C} felett.

6. Oldjuk meg $\mathbb{Q}^{2 \times 2}$ -ben az $X^4 = 2X$ egyenletet. Igazoljuk, hogy ha $M \in \mathbb{Q}^{2 \times 2}$, akkor $M^{1640} = 0 \implies M^2 = 0$. Igaz ez $\mathbb{Q}^{3 \times 3}$ -ban is?

7. (**) Legyen M egy $n \times n$ -es nilpotens mátrix (azaz $\exists k M^k = 0$). Igazoljuk, hogy $M^n = 0$. Mutassuk meg, hogy egy komplex elemű négyzetes mátrix akkor és csak akkor nilpotens, ha minden hatványának nulla a nyoma. Az első hány hatványra kell ezt feltenni?

8. Igazoljuk, hogy ha M invertálható mátrix, akkor M^{-1} polinomja M -nek.

9. Igazoljuk, hogy a Gauss-elimináció elvégzése után kapott mátrix sorrangja és determinánsrangja is megegyezik a vezéregyesek számával.

10. Bizonyítsuk be, hogy ha A és B lineáris leképezések, melyekre $A + B$ értelmes, akkor $\text{Im}(A + B) \subseteq \text{Im}(A) + \text{Im}(B)$, és ezért $r(A + B) \leq r(A) + r(B)$. Adjunk példát olyan esetre, amikor egyenlőség áll, és olyanra is, amikor nem.

11. (*) Éjfélkor a hétfejű sárkány megjelent a királylánynál, felírt egy 13×21 -es 8 rangú valós mátrixot, és a következőket mondta. „Minden reggel megváltoztathatod a mátrix egy elemét. Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztathatom a mátrix egy elemét. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” Érdemes-e a királylánynak algebrát tanulnia?

A sárkány a királylány hűgához is bement. „Neked egy 8 rangú 8×8 -as M mátrixot kell most felírnod. Minden reggel meg kell változtatnod a mátrix egy elemét (tehát M -et már holnap reggel is). Én minden éjjel eljövök, és én is megváltoztatom a mátrix egy elemét. Mindketten mindig kötelesek vagyunk egy-egy elemet ténylegesen meg is változtatni. Ha a mátrix rangját hétté tudom tenni, akkor felfallak.” A királylány húga életben maradt-e?

12. ()** Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges K test feletti polinom előáll (konstans szorzó erejéig) egy alkalmas K feletti vektortéren értelmezett lineáris transzformáció karakterisztikus polinomjaként. Igaz-e az állítás karakterisztikus polinom helyett minimálpolinommal? Igaz-e, hogy ha f egy k -adfokú polinom, és $k \leq n$, akkor f (konstans szorzó erejéig) egy alkalmas $n \times n$ -es mátrix minimálpolinomja? Független-e a válasz az alaptesttől?

13. ()** Mutassuk meg, hogy ha $J = \lambda E + N$ egy Jordan-blokk, és f egy polinom, akkor $f(J)$ -ben a főátló felett csupa nulla áll, és a főátlóval párhuzamos, a főátlótól lefelé számított k -edik „ferde sor” mindegyik eleme $f^{(k)}(\lambda)/k!$, ahol a $^{(k)}$ kitevő k -edik deriváltat jelöl.

14. ()** Tegyük föl, hogy egy $A \in \mathbb{Q}^{n \times n}$ mátrix összes sajátértéke racionális. Igazoljuk, hogy ha A diagonalizálható \mathbb{C} felett, akkor diagonalizálható \mathbb{Q} felett is. Igaz-e, hogy A -nak létezik Jordan-alakja \mathbb{Q} fölött?

15. ()** Bizonyítsuk be, hogy algebrailag zárt test fölött minden négyzetes mátrix hasonló a transzponáltjához.

16. ()** Legyen $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$, $B \in \mathbb{C}^{k \times k}$ és tekintsük az $n \times k$ -as mátrixok $\mathbb{C}^{n \times k}$ vektorterén azt a lineáris transzformációt, ami egy $M \in \mathbb{C}^{n \times k}$ mátrixhoz az $AM - MB \in \mathbb{C}^{n \times k}$ mátrixot rendel. Igazoljuk, hogy ez a lineáris transzformáció pontosan akkor bijektív, ha A -nak és B -nek nincs közös sajátértéke.

17. ()** Mutassuk meg, hogy sajátalterek összege direkt összeg (kettőnél több tagra is).

18. ()** Bizonyítsuk be, hogy ha $A \in \text{Hom}(V)$ és $m_A = fg$, ahol f és g relatív prímek, akkor V az A -invariáns $\text{Ker } f(A)$ és $\text{Ker } g(A)$ alterek alterek direkt összege. Ha A -t leszűkítjük ezekre az alterekre, akkor mi lesz a minimálpolinom? Adjunk meg ennek alapján egy olyan bázist, amelyben A mátrixa diagonális blokkokra bomlik, és minden blokk minimálpolinomja egy irreducibilis polinom hatványa.

19. ()** Mutassuk meg, hogy ha $AB = BA$, akkor A minden sajátaltere, továbbá $\text{Im } A$ és $\text{Ker } A$ is B -invariáns altér. Elhagyható-e a felcserélhetőség feltétele?

20. ()** Tegyük fel, hogy A egy olyan lineáris transzformáció egy n -dimenziós téren, melynek n különböző sajátértéke van. Igazoljuk, hogy A -nak pontosan 2^n invariáns altere van, továbbá, hogy minden A -val felcserélhető lineáris transzformáció diagonalizálható.

21. ()** Legyen V egy \mathbb{C} feletti n -dimenziós vektortér, A pedig egy lineáris transzformáció V -n. Bizonyítsuk be, hogy V -nek minden $0 \leq k \leq n$ -re van k -dimenziós A -invariáns altere.

22. ()** Végtelen test fölött mely transzformációknak van végtelen sok invariáns altere?

23. ()** Legyen V véges dimenziós, $A \in \text{Hom}(V)$ és $0 \neq v \in V$. Jelölje továbbá $m_{A,v}$ azt a minimális fokú normált polinomot, melyre $m_{A,v}(A)v = 0$. Igazoljuk a következőket:

- (1) A minimálpolinomja az összes $m_{A,v}$ legkisebb közös többszöröse, midőn v befutja V -t.
- (2) $W = \langle v, Av, A^2v, \dots \rangle$ épp a v -t tartalmazó legszűkebb A -invariáns altér.
- (3) $\dim(W) = \deg(m_{A,v})$.
- (4) Ha A minimálpolinomjának van k -adfokú irreducibilis osztója, akkor A -nak van k -dimenziós invariáns altere.
- (5) Egy lineáris transzformáció karakterisztikus polinomja akkor és csak akkor irreducibilis, ha a transzformációnak csak két invariáns altere van (a triviálisak).

Határozzuk meg az $m_{A,v}$ polinomot tetszőleges v esetén, ha A a síkon egy tengelyes tükrözés, egy forgatás, valamint ha A a deriválás a polinomok vektorterén.