Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 4. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása

1. Sajátérték, sajátvektor, sajátaltér

Emlékeztető: Ha $Mv = \lambda v$, ahol $v \neq 0$, akkor v **sajátvektora** M-nek, és λ a hozzá tartozó **sajátérték.** Az M lehet mátrix is, lineáris transzformáció is. A $v \neq 0$ kikötés azért kell, mert $v = 0$-hoz minden λ jó lenne; λ lehet nulla. **Geometriailag:** Mv **és** v **párhuzamosak.** A λ sajátértékhez tartozó sajátvektorok a nullával kiegészítve **sajátalteret** alkotnak. Ez az $M - \lambda I$ leképezés magtere, ahol I az identikus transzformáció.

Például ha T tengelyes tükrözés egy origón átmenő egyenesre, akkor egy $v \neq 0$ vektor két esetben lesz párhuzamos a tükörképével: ha a tengellyel párhuzamos, ekkor $T(v) = v$, tehát a sajátérték 1, vagy ha a tengelyre merőleges, ekkor $T(v) = -v$, és a sajátérték -1. A két (egydimenziós) sajátaltér tehát a tengely, illetve a rá merőleges, origón átmenő egyenes.

Egy origó körüli forgatásnak viszont nincs sajátvektora, sem sajátaltere, kivéve, ha 180 fokos vagy ha 0 fokos (azaz a helybenhagyás). Ebben a két esetben minden vektor sajátvektor, a sajátérték -1, illetve 1, a sajátaltér pedig az egész sík (ami kétdimenziós).

A sajátértékek kiszámítása a következő. Ha transzformációról van szó, akkor legyen M a mátrixa. A $k_M(x) = \det(M - xE)$ kifejezés x-nek a **karakterisztikus polinomja,** ahol E az egységmátrix, ennek gyökei a sajátértékek. Minden egyes λ sajátértékhez $Mv = \lambda v$ egy homogén lineáris egyenletrendszer a v vektor komponenseire. (Ha csak a csupa nulla megoldás van, akkor valamit elszámoltunk.) A sajátaltér dimenziója a szabad változók száma.

Határozzuk meg az $y = x$ egyenesre tükrözés sajátértékeit és sajátvektorait mátrixokkal.

E tükrözés mátrixát már korábban kiszámoltuk (a szokásos bázisban).

$$[T] - xE = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - x \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{bmatrix}$$

(praktikusan: a főátlóból levonunk x-et). Ennek determinánsa $x^2 - 1$, a gyökök, vagyis a sajátértékek 1 és -1. A sajátvektorok kiszámítása lineáris egyenletrendszerrel:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}, \quad \text{illetve} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix} = (-1) \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

Az első egyenletrendszer megoldása $x = y$, a másodiké $x = -y$. Ezért az 1 sajátvektorhoz tartozó sajátvektorok $[x, x]^T$, illetve $[x, -x]^T$, ahol $x \neq 0$. Az ennek megfelelő pontok a síkon tehát (x, x) (a tengely) és $(x, -x)$ (a tengelyre merőleges egyenes), kivéve az origót.

Mik az origó körüli $\alpha \neq 0, 180°$ szögű forgatás mátrixának sajátvektorai $\mathbb{C}$ fölött?

$$k(x) = \begin{vmatrix} \cos\alpha - x & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha - x \end{vmatrix} = x^2 - 2\cos\alpha x + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = x^2 - 2\cos\alpha x + 1\,,$$

a két gyök, azaz a sajátértékek $\cos\alpha \pm i\sin\alpha$ (emlékezzünk vissza, hogy az ezekkel való szorzás pontosan a $\pm\alpha$ szögű forgatás a komplex számsíkon). A megfelelő sajátvektorok az $[1, \mp i]^T$ vektorok nem nulla skalárszorosai, a sajátalterek egydimenziósak.

Mik az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés sajátértékei és sajátvektorai?

Karakterisztikus polinom: $x^2 - x$, sajátértékek: 0 és 1, a megfelelő sajátalterek: az y-tengely, illetve az $y = x$ egyenes. *Általában a 0-hoz tartozó sajátaltér a leképezés magtere.*

Mik a deriválás sajátértékei és sajátvektorai a legfeljebb harmadfokú polinomok terén?

Az $f' = \lambda f$ egyenletben a bal oldal foka kisebb a jobb oldal fokánál, kivéve ha valamelyik oldalon nullapolinom áll. Ez csak úgy lehet, hogy $\lambda = 0$ és f konstans. Ezért az egyetlen sajátérték a nulla, és a megfelelő sajátaltér a konstans polinomokból áll, ami egydimenziós.

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit, sajátaltereit, valamint ezek dimenzióját.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

Az első mátrix karakterisztikus polinomja $-x^3 + 1$. Csak az 1 valós gyök, a megfelelő sajátaltér az $[x, x, x]^T$ alakú vektorokból áll és egydimenziós. Komplex fölött sajátérték a másik két harmadik egységgyök is, azaz $\cos 120° + i \sin 120°$. Mi a megfelelő A transzformáció?

Az egységkocka csúcsai az (a, b, c) pontok, ahol $a, b, c \in \{0, 1\}$. Az A helyben hagyja a $(0, 0, 0) - (1, 1, 1)$ testátló pontjait, hiszen azok sajátvektorok 1 sajátértékkel. Az origóval élszomszédos három csúcs permutálódik: $(1, 0, 0) \mapsto (0, 1, 0) \mapsto (0, 0, 1) \mapsto (1, 0, 0)$. Ezek szabályos háromszöget alkotnak (az oldalak lapátlók), melynek síkja merőleges a testátlóra. Ha a kockát ennek a testátlónak az irányából a déli nap megvilágítja, akkor az árnyéka egy szabályos hatszög lesz. Az A transzformáció e testátló körüli forgatás 120 fokkal. Ez összevág azzal, hogy a transzformációt háromszor kell végrehajtani ahhoz, hogy a helyben hagyást kapjuk, de azzal is, hogy a komplex sajátértékek szöge 120°. Érzékelhetjük, hogy a sajátértékek és sajátvektorok most is sokat elárulnak a transzformáció működéséről.

A második mátrix karakterisztikus polinomja $(\alpha - x)^3$, az egyetlen sajátérték az α (komplex fölött is), a megfelelő sajátaltér pedig egydimenziós, az $[1, 0, 0]^T$ generálja.

2. Diagonalizálhatóság

Emlékeztető: Görbék szebb egyenletének felírásához, differenciálegyenletek megoldásához, mátrixok gyors hatványozásához hasznos olyan bázist keresni, amelyben a mátrix diagonális, azaz a főátlón kívül minden eleme nulla. Ez azt jelenti, hogy a bázis elemei sajátvektorok, a főátlóban pedig a megfelelő sajátértékek állnak. Ha van ilyen bázis, akkor a mátrixot **diagonalizálhatónak** nevezzük. Például a tengelyes tükrözés diagonalizálható, mert egy tengely irányú és egy tengelyre merőleges nem nulla vektor bázist alkot. A 90°-os forgatás $\mathbb{R}$ fölött nem diagonalizálható, de $\mathbb{C}$ fölött igen.

Egy λ sajátértékhez tartozó sajátaltér dimenziója a λ **geometriai multiplicitása.** Ha mindegyik sajátaltérben veszünk egy bázist, akkor ezek együtt bázist alkotnak a térben is. **Ezért egy $n \times n$-es mátrix pontosan akkor diagonalizálható, ha a geometriai multiplicitások összege n.** Ha λ a minimálpolinomnak k-szoros gyöke, akkor k a λ **algebrai multiplicitása,** ami legalább akkora, mint a geometriai multiplicitása. Így **ha a karakterisztikus polinomnak n különböző gyöke van, akkor a mátrix diagonalizálható.**

A síkon egy egyenesre vetítés karakterisztikus polinomja $x^2 - x$, aminek két (valós) gyöke van, ezért a vetítések diagonalizálhatók. A 180 fokos forgatás karakterisztikus polinomja $(x + 1)^2$, a -1 sajátérték algebrai és geometriai multiplicitása is 2, ez a transzformáció tehát szintén diagonalizálható, noha a karakterisztikus polinomjának csak egy gyöke van. A deriválás a harmadfokú polinomok terén nem diagonalizálható semelyik test fölött sem, az egyetlen sajátérték a 0, melynek algebra multiplicitása 4, a geometriai csak 1.

3. További feladatok

1. *Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.*

Válasszuk P-t az origónak. Egy harmadfokú valós együtthatós polinomnak van valós gyöke, ezért van egy v sajátvektor. Ennek Q végpontja a PQ egyenes valamelyik Q' pontjába képződik. Mivel a transzformáció egybevágóság, Q ugyanolyan távolságra van P-től, mint Q'.

2. *Az M négyzetes mátrix nyoma a főátló elemeinek összege, jele $\operatorname{tr}(M)$ (trace). Igazoljuk, hogy MN és NM nyoma egyenlő; ha S invertálható, akkor $\operatorname{tr}(S^{-1}AS) = \operatorname{tr}(A)$; végül ha $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $MN - NM$ nem az egységmátrix.*

Nyilván $\operatorname{tr}(MN) = \operatorname{tr}(NM) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} m_{ij} n_{ji}$, továbbá ha $M = S^{-1}A$ és $N = S$, akkor $MN = S^{-1}AS$ és $NM = A$. Az $MN - NM$ nyoma nulla, az egységmátrixé pedig n.

3. *Legyen $k_M(x) = \det(M - xE)$ az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $c(x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n)$ (ahol $c, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{C}$). Igazoljuk:*

(1) *A $k_M(x)$ tényleg n-edfokú polinom, és a főegyüttható $c = (-1)^n$.*
(2) *Az M sajátértékeinek összege az M nyoma, pontosabban $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \operatorname{tr}(M)$ (azaz a sajátértékeket az algebrai multiplicitásukkal kell venni). Ez a szám a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.*
(3) *Az M sajátértékeinek szorzata $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det(M)$, ami k_M konstans tagja. Hogyan látszik a karakterisztikus polinomról, hogy M invertálható-e?*

A $\det(M - xE)$ definíciója szerint $n!$ tagból áll. Az x^n csak abban a tagban jelenik meg, amikor a főátló elemeit szorozzuk össze. Minden más tag foka legfeljebb $n-2$, mert legalább két tényező nem a főátlóból való. Ezért az x^n és az x^{n-1} együtthatója az $(m_{11}-x)\ldots(m_{nn}-x)$ szorzatból olvasható le: a főegyüttható $(-1)^n$, az x^{n-1} együtthatója pedig $(-1)^{n-1} \operatorname{tr} M$. A karakterisztikus polinom gyöktényezős alakja tehát $(-1)^n(x - \lambda_1)\ldots(x - \lambda_n)$. Az x^{n-1} együtthatóját, illetve a konstans tagot összehasonlítva az állítást kapjuk. A mátrix pontosan akkor invertálható, ha $\det(M) = k_M(0) \neq 0$, vagyis ha a nulla nem sajátérték.

4. *Igazoljuk, hogy az algebrai multiplicitás legalább akkora, mint a geometriai.*

Legyenek $b_1, \ldots, b_k$ független sajátvektorok λ sajátértékkel. Egészítsük ki ezt a rendszert a tér bázisává, és ebben legyen M a transzformáció mátrixa. Fejtsük ki az $M - xE$ determinánsát sorban az első k oszlop szerint. Láthatjuk, hogy $(\lambda - x)^k$ kiemelhető.

5. (*) *Igazoljuk, hogy $A \in \operatorname{Hom}(V)$ pontosan akkor diagonalizálható, ha a sajátalterek összege V, illetve ha a geometriai dimenziók összege $\dim V$.*

Az 5. dia 2. oldalán bizonyított állítás (F6.1.9) szerint páronként különböző sajátértékekhez tartozó sajátvektorok függetlenek. Belátjuk, hogy ha az egyes sajátalterekből független rendszereket veszünk, akkor ezek együttvéve is függetlenek. Valóban, ha ezeknek egy lineáris kombinációjában összevonjuk az egyes sajátalterekbeli összegeket, akkor F1.6.9 miatt minden összeadandó nulla, és így az egyes rendszerek függetlensége miatt minden együttható is nulla.

Ha A diagonalizálható, akkor minden vektor sajátvektorok összege, vagyis a sajátalterek összege V. Vegyünk minden sajátaltérben egy bázist. Ha a sajátalterek összege V, akkor ezek együtt generátorrendszert alkotnak, de az előzőek szerint függetlenek is, ezért ez bázis, és így a geometriai dimenziók összege $\dim V$. Ha a geometriai dimenziók összege $\dim V$, akkor az egyes sajátalterekből vett bázisok egyesítése bázis lesz V-ben, tehát A diagonalizálható.