8. $f(1) = f(0)$ $\qquad f(i) = 0$

$(x^2+1)(x-2)$ jó.

kell még 3

$x(x-1)x^k(x^2+1)$

$k = 0, 1, 2$

$\underbrace{Av = \lambda v}$

$v \neq 0$.

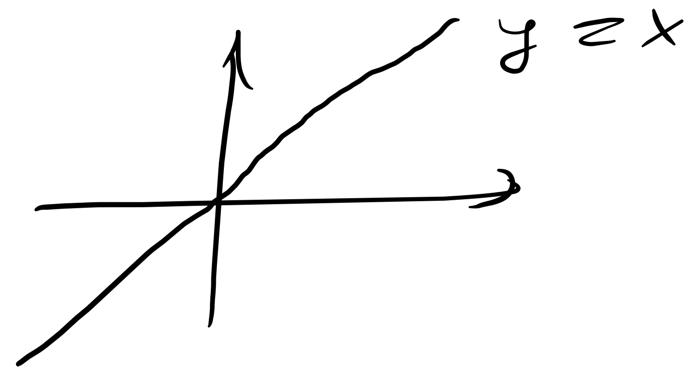
A trafó: $V \to V$.

(négyzetes) mátrix

$\det(A - \lambda I)$ λ-nak polinomja.

$\det([A] - \lambda E)$

T $y = x$-re tükrözés



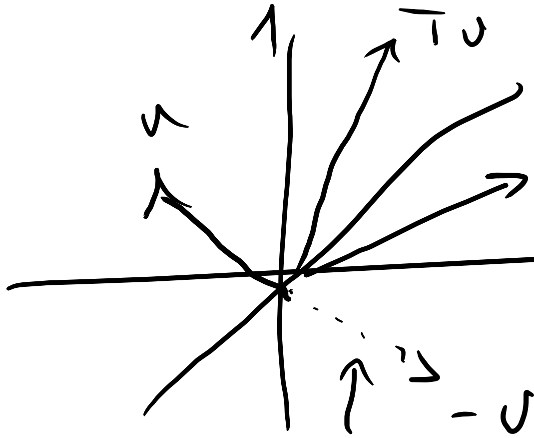
$[T] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

főátlóból $-x$ és det

$\begin{vmatrix} -x & 1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2 - 1 =$ kar. pol. $k_T(x)$

gyökei s.értékek $\lambda = 1, -1$.

$Tv = \lambda v$ azaz $Tv \parallel v$



$y = x$ -re tükrözés

$y = -x$ önmaga.

$v \parallel Tv$

v a tengelyen $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$

$Tv = 1 \cdot v$ $\quad \lambda = 1$

$v \perp$ a tengelyre $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$

$Tv = -v$ $\quad \lambda = -1$

$[Tv = \lambda v]$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \overset{\lambda}{1} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y \\ x \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} y = x \\ x = y \end{matrix}\right\}$ lin. homogén

$v = 0$ nem s.vektor

DE a sajátÉRTÉKben 0 lehet van

$\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ $x \neq 0$ 1

$\lambda = 1$ s.a. $\left\{ \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} \middle| x \in \mathbb{R} \right\}$

$$\overset{\lambda}{-1} = (-1) \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\left.\begin{matrix} x = -y \\ -x = y \end{matrix}\right\}$ $\begin{bmatrix} x \\ -x \end{bmatrix}$ $x \neq 0$ 1

$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ s.v. B VAN.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -x & -1 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = x^2+1 \qquad \lambda = \pm i$$

valósban NINCS sajátvektor.

($\nexists$ 90 fokos forgatás, egy $\neq 0$ vektor sem párhuzamos a képével)

$\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} = i\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} -y = ix \\ x = iy \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} iy \\ y \end{bmatrix} \begin{matrix} y \neq 0 \\ y \in \mathbb{C} \end{matrix} \qquad 1$$

$$\| \qquad -i\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} -y = -ix \\ x = -iy \end{matrix} \qquad \begin{bmatrix} -iy \\ y \end{bmatrix} \begin{matrix} y \neq 0 \\ y \in \mathbb{C} \end{matrix} \qquad 1$$

$\mathbb{C}$ felett van $\begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} \alpha - x & 0 \\ 1 & \alpha - x \end{vmatrix} = (\alpha - x)^2$$

$$\lambda = \alpha$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ x + \alpha y \end{bmatrix} = \alpha\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \left.\begin{matrix} \alpha x = \alpha x \\ x + \alpha y = \alpha y \end{matrix}\right\}$$

$$1 \qquad \Leftrightarrow x = 0$$

NINCS $\Rightarrow$ nem diag

$\forall$ 2 of. $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix} 0 \\ y \end{bmatrix} \begin{matrix} y \neq 0 \\ y \in \mathbb{R}, \mathbb{C} \end{matrix}$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix} \qquad (\cos\alpha - x)^2 + \sin^2\alpha = x^2 - 2\cos\alpha + 1$$

$$\lambda = \boxed{\cos\alpha \pm i\sin\alpha}$$

↗ ezzel forgatás $= \pm\alpha$ szögű forgatás.

A s.érték elárulja a forgatás szögét! HF 1

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} -x & 1 & 0 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 0 & -x \end{vmatrix} \overset{\text{HF}}{=} -x^3 + 1$$

a kar. pol.

$\mathbb{R}$ $\lambda = 1$

Valós fölött nincs. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ nem elég.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ z \\ x \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$x = y = z$

$$\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix} \quad x \neq 0.$$

1

$$\underbrace{-x^3+1}_{k(x)} = 0 \qquad \lambda = 1$$

$\varepsilon_1, \varepsilon_2$ primitív 3. osztású gyökök.

$$= \cos \boxed{120^\circ} + i \sin 120^\circ = \left(-\tfrac{1}{2} + \tfrac{\sqrt{3}}{2} i\right)$$

S. U. HF $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ vannak-e a képletben betűket. HF ① feladat $\exists$ 3 ⓔ s. vektor VAN DERMONDE

$$\det = \underbrace{k(x) \text{ a } 0 \text{ helyen}} \qquad \det \begin{vmatrix} -0 & 1 & 0 \\ 0 & -0 & 1 \\ 1 & 0 & -0 \end{vmatrix} = 1$$

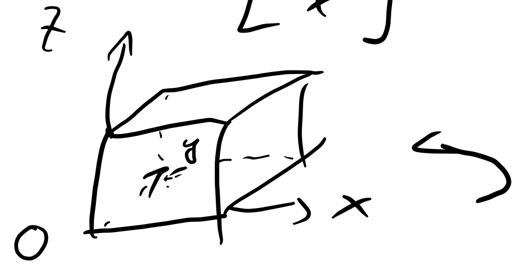
Irányítástartó a térben 0 fixpont
(=) egyenes körüli forgatás!

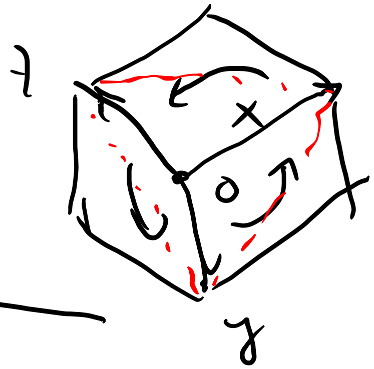
egyenes? forgatás tengelye fix $\Longleftrightarrow$ 1-hez tartozó s. vektorok $\begin{bmatrix} x \\ x \\ x \end{bmatrix}$ egyenes.

Hány fokkal? 120°? → HF ① -dim.

$$\begin{array}{c|ccc} & e_x & e_y & e_z \\ \hline e_x & 0 & 1 & 0 \\ e_y & 0 & 0 & 1 \\ e_z & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$e_x \mapsto e_z$
$e_y \mapsto e_x$
$e_z \mapsto e_y$



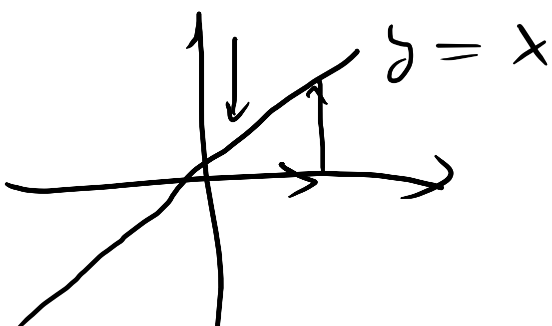


3 tal. lehetőség.

120°

Algebrista : csinálja 3-szor: kellene kapni.

$3\alpha = 360^\circ \Rightarrow \alpha = 120^\circ$.



$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 1 & -x \end{vmatrix} = (-x)(1-x) = x^2 - x$$

$$\lambda = 1, 0$$

amire vektor: $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix} = 1\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ ① $\quad x = x,\ x = y \quad x = y$ egyen

fix, s.é = 1

a melyik irányból vektor → 0 $\quad 0\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \left.\begin{matrix} x = x \\ x = 0 \end{matrix}\right\}$ y legy ①

s.é = 0. (MAGTÉR) $\quad \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, ió DIAG ✓

Deriválás ≤ 2 fokúra.

$f' = \lambda f$ $\quad$ λf és f foka ugyanaz, ha $\lambda \neq 0$

f' foka $<$ f foka $\Rightarrow$ ~~NINCS~~ $\lambda = 0$.

1 $\quad f' = 0 \Rightarrow f$ konstans.

$\mathbb{H}$ mátrixa

$$\begin{array}{c|ccc} & 1' & x' & {x^2}' \\ \hline 1 & 0 & 1 & 0 \\ x & 0 & 0 & 2 \\ x^2 & 0 & 0 & x \end{array}$$

főátló ∇-mátrix.

NEM diag. $\mathbb{H}$.
1 db F s.v. lehet.

Van-e nem 1-dim. sajátaltér??

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{vmatrix} 1-x & 0 \\ 0 & 1-x \end{vmatrix} = (x-1)^2 \qquad \lambda = 1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 1 \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \begin{matrix} x = x \\ y = y \end{matrix}$$

$$\begin{array}{cc|c} x & y & \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}$$

0 db kötött

$\boxed{\text{2 szabad változó}}$

$\forall$ vektor sajátv. $\neq 0$

$\boxed{\text{Geom. multiplicitás.}}$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ B diag.

2 -dim.

dim(s.altér) = szabad vált. száma.

$f(x) = (x-1)^2$ algebrai multiplicitás.

$E = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ↑ 1 kétszeres gyök

$\begin{bmatrix}\alpha & 0\\ 1 & \alpha\end{bmatrix}$ helyett $\begin{bmatrix}2 & 0\\ 1 & 2\end{bmatrix}$ $f(x) = (x-2)^2$

$x = 2$

nincs s.v. bázis

1 (F) s.v. van.

s. altér 1 dim.

geom. mult. = 1

alg. mult. = 2.

VAN-e bázis s.vektorokból ?

SÁRGÁVAL

Diag <=> $\forall$ s.é.-re az alg. és geom. dim megegyezik. $\forall$ saját altérben (B), egy csak (F)

Spec Ha $f(x)$-nek nincs többszörös gyöke $\mathbb{C}$ felett => 1 mult. = 1

DIAG-ható.

FONTOS $\mathbb{C}$ felett!

<u>Pl.</u> $90°$ forg. $\mathbb{R}$ felett nincs s.v.

$\mathbb{R}$ felett nem diag.

$\mathbb{C}$ felett igen.

$\mathbb{R}$ felett diag-ható : $\mathbb{C}$ felett diag-ható és $\forall$ gyöke s.é. valós.

<u>Ism:</u> s.v.-ból álló bázisban a mátrix diagonális, főátlóban a s.é.-ek.

<u>Pl.</u> T $y=x$-re tükr.

$$\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

főátlóban a két s.é.

HF (2.) alg. mult $\geq$ geom. mult.
(3.) sajátvektorok mi köze?
(5.) !! tudni az állítást!

$g(x)$ n-fokú, főegyütthatója $(-1)^n$

A mátrix NYOMA (= főátló összege)
$=$ s.é.-ek összege (alg. multiplicitással)
$=$ x^{n-1} együtthatója $g(x)$-ben $\cdot (-1)^{n-1}$!

Előjele jó!

A mátrix det-a $=$
$=$ a s.é. szorzata
$=$ $g(x)$ konstans tagja.

Pl. $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ s.é. $1, -1$ $\quad 1 + -1 = 0 = 0 + 0$

det $-1 = (1)(-1) = \det$

2×2

$$\begin{vmatrix} a-x & b \\ c & d-x \end{vmatrix} = (x-a)(x-d) - bc = (x-\lambda_1)(x-\lambda_2)$$

$$= x^2 - \underbrace{(a+d)}_{\text{nyom}}x + (\underbrace{ad-bc}_{\det})$$

f.e. $=1$

fd $=2$ $\quad (-1)^{2-1} = -1$

gy-e.h. öf

$\lambda_1 \lambda_2 =$ konst. tag $= ad - bc = \underline{\underline{\det}}$

$\underline{\underline{\lambda_1 + \lambda_2}} = -$ x-es tag e.h. $= \underline{\underline{a+d}}$