Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 4. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk, illetve mátrixok diagonalizálhatóságát, karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, sajátaltereit, valamint ezek dimenzióját.

(a) Az alábbi mátrixok $\mathbb{R}$ illetve $\mathbb{C}$ felett:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 1 & \alpha \end{pmatrix}$$

Számítsuk ki az utolsó három mátrix n-edik hatványát.

(b) A vektortér a sík $\mathbb{R}$ felett, a transzformáció pedig az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges irányú vetítés; az origó körüli α szögű forgatás.

(c) A transzformáció a deriválás az $\mathbb{R}[x]$ legfeljebb másodfokú elemeinek vektorterén.

2. Igazoljuk, hogy ha a λ sajátértékhez tartozó sajátaltér k dimenziós (**geometriai** multiplicitás), akkor λ legalább k-szoros gyöke a karakterisztikus polinomnak (**algebrai** multiplicitás). Vizsgáljuk meg az **1.** feladat mátrixai esetében, hogy mikor teljesül egyenlőség.

3. Legyen A egybevágósági transzformáció a térben, mely a P pontot helyben hagyja. Igazoljuk, hogy van olyan $Q \neq P$ pont, melyet A vagy helyben hagy, vagy P-re tükröz.

4. Az M négyzetes mátrix nyoma a főátló elemeinek összege, jele $\mathrm{tr}(M)$ (trace). Igazoljuk:

(1) MN és NM nyoma egyenlő, és ha M invertálható, akkor $\mathrm{tr}(M^{-1}NM) = \mathrm{tr}(N)$.

(2) Ha $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$, akkor $MN - NM$ nem az egységmátrix.

5. Legyen $k_M(x) = \det(M - xE)$ az $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mátrix karakterisztikus polinomja, és ennek gyöktényezős alakja $c(x - \lambda_1)\dots(x - \lambda_n)$ (ahol $c, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{C}$). Igazoljuk:

(1) A $k_M(x)$ tényleg n-edfokú polinom, és a főegyüttható $c = (-1)^n$.

(2) Az M sajátértékeinek összege az M nyoma, pontosabban $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = \mathrm{tr}(M)$ (azaz a sajátértékeket az algebrai multiplicitásukkal kell venni). Ez a szám a k_M polinomban x^{n-1} együtthatójának $(-1)^{n-1}$-szerese.

(3) Az M sajátértékeinek szorzata $\lambda_1 \cdot \ldots \cdot \lambda_n = \det(M)$, ami k_M konstans tagja.

6. Hogyan látszik a karakterisztikus polinomról, hogy a transzformáció invertálható-e?

7. Melyek igazak az alábbi állítások közül?

(a) Ha u sajátvektora A-nak és B-nek, akkor $A + B$-nek is.

(b) Ha λ sajátértéke A-nak és B-nek, akkor $A + B$-nek is.

(c) Két sajátvektor összege is sajátvektor.

(d) Ha λ sajátértéke A-nak, akkor λ^2 sajátértéke A^2-nek.

(e) Ha λ^2 sajátértéke A^2-nek, akkor λ sajátértéke A-nak.

(f) Ha 0 sajátértéke A^2-nek, akkor 0 sajátértéke A-nak.

8. ***(*)*** Igazoljuk, hogy $A \in \mathrm{Hom}(V)$ pont akkor diagonalizálható, ha a sajátalterek összege V.

---

9. Az alábbi sorozatok általános elemét írjuk fel a mátrixhatványozás segítségével, majd a mátrixot diagonalizálva adjunk az eredményre explicit képletet.

(1) $F_0 = F_1 = 1$, $F_k = F_{k-1} + F_{k-2}$ (*Fibonacci-sorozat*).

(2) $a_0 = 5$, $a_1 = 6$, $a_2 = 10$, $a_k = 2a_{k-1} - a_{k-2} + 2a_{k-3}$.

(3) $a_0 = 1$, $b_0 = 1$, $a_{k+1} = 2a_k + b_k$, $b_{k+1} = 2b_k - a_k$ ($k \geq 0$).

10. *(**)* Igazoljuk, hogy F_k az $\left(\left((1+\sqrt{5})/2\right)^{k+1}\right)/\sqrt{5}$-höz legközelebbi egész szám.

11. *(**)* Bizonyítsuk be, hogy ha A *idempotens* lineáris transzformáció a V vektortéren, azaz $A^2 = A$, akkor $\mathrm{Im}(A) + \mathrm{Ker}(A) = V$ és $\mathrm{Im}(A) \cap \mathrm{Ker}(A) = 0$. (Az ilyen lineáris transzformációkat *projekcióknak* nevezzük.) Igazoljuk, hogy a sík egy lineáris transzformációja akkor és csak akkor idempotens, ha nulla, az identitás, vagy egy origón átmenő egyenesre való (nem feltétlenül merőleges) vetítés.

12. *(**)* Legyen V egy véges dimenziós vektortér és $A \in \mathrm{Hom}(V)$. Igazoljuk, hogy van olyan k egész, melyre $V = \mathrm{Im}(A^k) + \mathrm{Ker}(A^k)$ és $V = \mathrm{Im}(A^k) \cap \mathrm{Ker}(A^k) = 0$ egyszerre teljesül.

13. *(**)* Igazoljuk, hogy ha M egy komplex elemű mátrix, akkor $n \to \infty$ esetén M^n pontosan akkor tart nullához, ha M minden sajátértékének az abszolút értéke 1-nél kisebb.

14. *(**)* Legyen V a valós függvények vektortere a pontonkénti műveletekre, és $r \in \mathbb{R}$ esetén $D_r \in \mathrm{Hom}(V)$ az a transzformáció, melyre $D_r(f)(x) = f(x+r) - f(x)$. Igazoljuk, hogy $D_r D_s = D_s D_r$. Mutassuk meg ennek felhasználásával, hogy egy n-edfokú polinom nem állítható elő (legfeljebb) n darab periodikus függvény összegeként.

Explicit képlet a Fibonacci-sorozatra. Legyen

$$v_k = \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_k \end{pmatrix}, \quad \text{ekkor} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{és} \quad v_{k+1} = \begin{pmatrix} F_k \\ F_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_{k-1} \\ F_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} v_k .$$

Az itt szereplő mátrixot M-mel jelölve tehát $v_{k+1} = Mv_k = M^2 v_{k-1} = \cdots = M^k v_1$. Így elegendő az M mátrix hatványaira explicit képletet adni. Ehhez M-et bázistranszformációval diagonális alakra hozzuk. Az M karakterisztikus polinomja

$$k(x) = \left| \begin{pmatrix} -x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} \right| = x^2 - x - 1 .$$

Ennek gyökei, vagyis M sajátértékei

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \quad \text{és} \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

(melyekre tehát $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$, $\lambda_1 - \lambda_2 = \sqrt{5}$ és $\lambda_1\lambda_2 = -1$). A megfelelő sajátvektorokat egy mátrix oszlopaiba írva kapjuk a diagonalizáló bázistranszformáció mátrixát:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}, \quad \text{azaz} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} = D .$$

Innen $D^k = S^{-1}MSS^{-1}MS \ldots S^{-1}MS = S^{-1}M^kS$, tehát $M^k = SD^kS^{-1}$. Diagonális mátrixot elemenként lehet hatványozni, így az inverz mátrix képletét felhasználva M^k-ra

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & 0 \\ 0 & \lambda_2^k \end{pmatrix} \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} \begin{pmatrix} \lambda_2 & -1 \\ -\lambda_1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{-1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} \lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 & -\lambda_1^k + \lambda_2^k \\ \lambda_1^{k+1}\lambda_2 - \lambda_2^{k+1}\lambda_1 & -\lambda_1^{k+1} + \lambda_2^{k+1} \end{pmatrix}$$

adódik. A $v_k = Mv_1$ összefüggésből tehát $F_k = -(\lambda_1^k\lambda_2 - \lambda_2^k\lambda_1 - \lambda_1^k + \lambda_2^k)/\sqrt{5}$.

Ezt még tovább alakíthatjuk a $\lambda_1\lambda_2 = -1$ és a $\lambda_i^{k-1} + \lambda_i^k = \lambda_i^{k+1}$ felhasználásával (utóbbi azért igaz, mert $1 + \lambda_i = \lambda_i^2$). A végeredmény:

$$F_k = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{k+1} \right) .$$