

Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat
A 3. és 4. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása, 1. rész

1. LINEÁRIS LEKÉPEZÉSEK

Emlékeztető: Az $A : V \rightarrow W$ leképezés két **azonos test feletti** vektortér között akkor lineáris, ha az alábbi két tulajdonság teljesül.

- (1) $A(v_1 + v_2) = A(v_1) + A(v_2)$ (**összegeztartás**).
- (2) $A(\lambda v) = \lambda A(v)$ (**λ -szoros tartása**).

Pl. a komplex konjugálás, $A(v) = \bar{v}$ összegeztartó: összeg konjugáltja a konjugáltak összege. Az altérhez hasonlóan példát kell adni, ha azt gondoljuk, hogy valamelyik feltétel nem teljesül. Tipikusan a homogén lineáris képlettel megadott leképezések lesznek lineárisak. Az összegeztartás következménye, hogy a nullvektor képe a nullvektor, ezt elsőként nézzük meg. Az origót fixáló hasonlóságok (speciálisan az egybevágóságok) lineárisak.

Miért nem lineárisak az alábbi leképezések?

- (a) $V = \mathbb{R}$ az \mathbb{R} felett, $W = \mathbb{C}$ a \mathbb{C} felett, A az $1 + i$ számmal való szorzás.
- (b) $V = W = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} felett, A a négyzetre emelés; az abszolút érték képzése.
- (c) $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}$ az \mathbb{R} felett, $A(v)$ a v komponenseinek a szorzata.
- (d) $V = W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az \mathbb{R} felett, $A(M) = M^2$; $A(M) = iM$.
- (e) $V = W$ a sík \mathbb{R} felett, A egy eltolás; az $(1, 1)$ pontra tükrözés.

Az (a) nem ugyanazon test fölötti vektorterek között megy. A (b)-nél $(1 + 1)^2 \neq 1^2 + 1^2$, illetve $|1 + (-1)| \neq |1| + |-1|$. A (c) esetében $v = [1, 1]$ és $\lambda = 2$ ellenpélda, mert $2 \cdot 2 \neq 2(1 \cdot 1)$. A (d)-ben v legyen az egységmátrix és $\lambda = 2$; az $M \mapsto iM$ kivezet a vektortérből. Az $(1, 1)$ -re való tükrözés a nullát nem viszi nullába, és az eltolás sem (kivéve ha helybenhagyás).

2. LEKÉPEZÉSEK MÁTRIXA

A mátrix és a leképezés ugyanannak az éremnek a két oldala, ahhoz hasonlóan, ahogy egy geometria feladatot is meg lehet oldani elemi eszközökkel és koordinátákkal való számolással is. A leképezés működését látni lehet, sokszor így érdemes tételeket bizonyítani. A mátrix viszont a konkrét számításokhoz nélkülözhetetlen, mint például a következő feladatban. A feladatot megoldhatnánk elemi geometriai eszközökkel is, de gyorsabb áttérni mátrixokra.

1. Legyen A az a z -tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x -tengelyt az y -tengelybe viszi, és B az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0, 0, 0)$ és $(1, 1, 1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1, 2, 3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $AB = BA$? (Megoldás később.)

Emlékeztető. Legyen \mathbf{b} bázis V -ben és \mathbf{c} bázis W -ben. Ekkor az $[A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}$ mátrix kiszámítása:

- (1) Rajzolunk egy üres mátrixot, balra a sorok mellé odaírjuk a $\mathbf{c} = (c_1, \dots, c_k)$ bázis elemeit, az oszlopok tetejére pedig az $A(b_i)$ vektorokat, ahol $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$.
- (2) Ha $A(b_i) = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_k c_k$, akkor a $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ számokat beírjuk az i -edik oszlopba. (Lineáris egyenletrendszer kell megoldani, de a szokásos bázisban ez egyszerű.)

Az AB kompozíció mátrixa az A és B mátrixának szorzata, egy v vektor $A(v)$ képének koordinátáit pedig úgy kapjuk meg, hogy A mátrixát megszorozzuk v koordinátavektorával. Képletben $[AB]_{\mathbf{d}/\mathbf{b}} = [A]_{\mathbf{d}/\mathbf{c}}[B]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}$ és $[A(v)]_{\mathbf{c}} = [A]_{\mathbf{c}/\mathbf{b}}[v]_{\mathbf{b}}$. A bázisokat úgy lehet megjegyezni, hogy a fenti képletekben a törtek „kiegyszerűsödnek”, például $\mathbf{d}/\mathbf{b} = (\mathbf{d}/\mathbf{c})(\mathbf{c}/\mathbf{b})$.

Írjuk fel az alábbi leképezések mátrixát a szokásos bázispárban.

- (a) $V = W = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} felett, A az 3-mal szorzás; az $1 + i$ -vel szorzás; a konjugálás.
 (b) $V = \mathbb{R}^3$, $W = \mathbb{R}$ az \mathbb{R} felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege.
 (c) $V = W = \mathbb{R}^{2 \times 2}$ az \mathbb{R} felett, $A(M) = M^T$; $A(M) = 2M$; $A(M) = iM$.
 (d) $V = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $W = \mathbb{C}$ az \mathbb{R} felett, $A(f) = f(i)$.
 (e) $V = W = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei az \mathbb{R} felett, $A(f) = f'$ (derivált).
 (f) $V = W$ a sík \mathbb{R} felett, A az $y = x$ egyenesre tükrözés, az origó körüli $+90$ fokos, illetve α szögű forgatás; az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés.

Mintamegoldás (d)-re. Az első vektortér szokásos bázisa $(1, x, x^2, x^3)$. Ezekbe a polinomokba kell i -t helyettesíteni, és az eredményt felírni a komplex számok szokásos, valós fölötti $(1, i)$ bázisában. Például $A(x^3) = i^3 = 0 \cdot 1 + (-1) \cdot i$, ezért a mátrix negyedik oszlopába 0 és -1 kerül. Figyeljünk arra, hogy a mátrixba skalárokat (az együtthatókat) kell írni, nem vektorokat (tehát nem polinomokat, vagy ebben az esetben komplex számokat), és hogy a mátrix sorainak száma $\dim(W)$, oszlopainak száma $\dim(V)$. Az eredmények a következők.

$$(a) \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b) \quad (1 \ 1 \ 1) \quad (\mathbb{R} \text{ bázisa az } 1 \text{ szám.})$$

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad (d) \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (e) \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(f) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Az $y = x$ -re való függőleges vetítésnél egy pont képét úgy kapjuk meg, hogy a rajta átmenő függőleges egyenesnek a metszéspontját vesszük az $y = x$ egyenessel. A deriválásnál csupa legfeljebb másodfokú polinomot kapunk, így a mátrix utolsó sora nulla.

Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz a szokásos bázisban?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Az $[A(v)] = [A][v]$ képlet alapján az (x, y) pont képét úgy kaphatjuk meg, hogy ennek koordinátavektorát, vagyis az $[x, y]^T$ oszlopvektort (balról) megszorozzuk a feladatban szereplő mátrixokkal. Például a harmadik mátrix esetében a szorzat a $[-x, -y]^T$, ez a transzformáció tehát az (x, y) pontot $(-x, -y)$ -ba viszi. Ez az origóra tükrözés. A többi mátrix esetében a transzformációk rendje a következők: helybenhagyás; a nulla transzformáció; az x -tengelyre tükrözés (vessük össze a komplex konjugálás mátrixával); az origó körüli -90 fokos forgatás; az origó középpontú háromszoros nyújtás; az y -tengelyre való merőleges vetítés.

A fenti 1. feladatban $[A] = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ és $[B] = (1/3) \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ (az $(1/3, 1/3, 1/3)$ pontra tükrözzük a bázisvektorokat). Mátrix-vektor szorzással látjuk, hogy az $(1, 2, 3)$ képe $(-2, 1, 3)$, illetve $(3, 2, 1)$. A két mátrix nem felcserélhető, ezért $AB \neq BA$.

3. BÁZISTRANSZFORMÁCIÓ

Az A mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Mi a mátrixa az $(1, 1)$, $(1, 2)$ bázisban?

Az $(1, 1)$ képét úgy kapjuk meg, hogy a mátrixot megszorozzuk $[1, 1]^T$ -tal, az eredmény $(3, 7)$. Hasonlóan $(1, 2)$ képe $(5, 11)$. Ezeket kell felírni az új bázisban. Az $\alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (3, 7)$ megoldása $\alpha = -1$ és $\beta = 4$, ezeket írjuk az új mátrix első oszlopába. A második oszlopba az $\alpha(1, 1) + \beta(1, 2) = (5, 11)$ megoldása kerül, vagyis -1 és 6 .

Oldjuk meg a feladatot a **bázistranszformáció képletével** is. Az új bázisra való áttérés S mátrixa úgy kapható, hogy a mátrix bal oldalára a régi bázist írjuk, a tetejére az újat, majd az oszlopokba olyan skalárokot, amelyek az új bázis elemeit a régi bázis elemeivel írják föl. Ekkor az új mátrixot az $S^{-1}MS$ képlet adja, ahol M a régi mátrix. A fenti esetben ez

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

(emlékezzünk rá, hogy kétszer kettős mátrix inverze az aldeterminánsos képlet szerint úgy kapható, hogy a főátlóban cserélünk, a mellékátlóban előjelet váltunk, és osztunk a determinánssal). Vegyük észre, hogy a bázistranszformáció képlete az előző gondolatmenetben szereplő egyenletrendszerek megoldását automatizálja, hiszen $Sx = v$ megoldása $x = S^{-1}v$.

4. TOVÁBBI FELADATOK

2. (*) Ha egy transzformáció mátrixa M , mi a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? És ha az első bázisvektort az első kettő összegével helyettesítjük? Mely transzformációknak ugyanaz minden bázisban a mátrixa? Melyek azok, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők?

Az első esetben a mátrix nem változik. A másodikban az első sor feleződik, az első oszlop kétszereződik (az első sor első eleme nem változik). A harmadikban az első oszlophoz hozzáadódik a második oszlop, a második sorból kivonódik az első sor (m_{21} -ből $m_{21} + m_{22} - m_{11} - m_{12}$ lesz). Ha A mátrixa minden bázisban ugyanaz, akkor egy-egy bázisvektor kétszerezésével látjuk, hogy a mátrix diagonális, majd egy bázisvektor másikkhoz adásával, hogy a diagonálisban csupa egyenlő elemek vannak. Ezért $[A]$ az egységmátrix skalárszorosa. A bázistranszformáció képlete szerint az utolsó kérdésre is ugyanez a válasz.

3. Legyen M az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan K és L nem nulla, kétszer kettős valós mátrixokat, melyekre $KM = 0 = ML$.

A K olyan leképezés mátrixa, amelyre igaz, hogy a vetítés után alkalmazva a nulla transzformációt kapjuk. Ilyen transzformáció bármilyen egyenesre való $y = x$ irányú vetítés. Az L olyan transzformáció mátrixa, melyre igaz, hogy a függőleges vetítést utána alkalmazva nullát kapunk. Ennek megfelel egy y -tengelyre való bármilyen irányú vetítés. Ha az y -tengelyre való, $y = x$ irányú vetítés mátrixát vesszük, akkor még $K = L$ is elérhető.

4. Egy vektortérben található 1526 olyan altér, hogy semelyik kettő sem izomorf, de ennél több nem. Hány dimenziós a vektortér?

Ha $\dim(V) = n$, akkor van $0, 1, \dots, n$ -dimenziós altere (vegyünk egy bázist, és hagyjunk el vektorokat), de másilyen nincs. Két vektortér akkor izomorf, ha a dimenziójuk megegyezik, tehát $n + 1$ -féle páronként nem izomorf altere van. Ezért $n = 1525$.