Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 3. és 4. prezentációhoz tartozó feladatsor

1. Az alábbi $A : V_1 \to V_2$ leképezések közül melyek lineárisak? Ahol a válasz igenlő, ott határozzuk meg a leképezés kép- és magterét, ezek dimenzióját, és írjuk föl a leképezés mátrixát alkalmas bázisban. A (g) pont esetében a mátrixot csak az origó körüli 90 fokos forgatás; az $y = x$ egyenesre való tükrözés; az erre az egyenesre való, függőleges vetítésre számítsuk ki, a szokásos, illetve a $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1,1)/\sqrt{2}$ bázisban.

(a) $V_1 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $V_2 = \mathbb{C}$ a $\mathbb{C}$ felett, A az $1+i$ számmal való szorzás.

(b) $V_1 = V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, A az 3 számmal való szorzás; az $1+i$ számmal való szorzás; a négyzetre emelés; a konjugálás; az abszolút érték képzése; a reciprok képzése.

(c) $V_1 = \mathbb{R}^n$, $V_2 = \mathbb{R}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(v)$ a v komponenseinek az összege; szorzata.

(d) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(M) = M^T$; $A(M) = 2M$; $A(M) = iM$; $A(M) = M^2$.

(e) $V_1 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb harmadfokú elemei, $V_2 = \mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f(i)$, illetve $A(f)$ az f nem nulla együtthatóinak összege; szorzata; négyzetösszege.

(f) $V_1 = V_2 = \mathbb{R}[x]$ legfeljebb n-edfokú elemei az $\mathbb{R}$ felett, $A(f) = f'$ (derivált).

(g) V_1 és V_2 a sík $\mathbb{R}$ felett, A egy eltolás; egy pont körüli forgatás; egy egyenesre (pontra) való tükrözés; egy egyenesre való vetítés.

2. Mely geometriai transzformációk tartoznak az alábbi mátrixokhoz? Adjuk meg a megfelelő transzformációk inverzét (ha létezik), és ezek mátrixait is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

---

3. Az A transzformáció mátrixa a sík szokásos bázisában $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$. Adjuk meg a bázistranszformáció képletét felhasználva az A mátrixát az $(1,1)$, $(1,2)$ bázisban, továbbá a $b_1 = (1,1)/\sqrt{2}$, $b_2 = (-1,1)/\sqrt{2}$ bázisban is.

4. Ha egy lineáris transzformáció mátrixa egy adott bázisban M, mi lesz a mátrix akkor, ha mindegyik bázisvektort (csak az első bázisvektort) a kétszeresére növeljük? És ha az első bázisvektort az első kettő összegével helyettesítjük? Mely lineáris transzformációknak lesz minden bázisban ugyanaz a mátrixa?

5. Melyek azok a lineáris transzformációk a síkon, amelyek mindegyik lineáris transzformációval felcserélhetők? Általánosítsuk a megoldást magasabb dimenzióra.

---

6. Tekintsük az alábbi transzformációkat a síkon: T az $y = x$ egyenesre tükrözés, F az origó körüli $+90$ fokos forgatás, X, illetve Y az x-tengelyre, illetve az y-tengelyre vetítés.

(a) Számítsuk ki, hová viszi az $F + T$ transzformáció az (x, y) pontot.

(b) Melyik transzformáció lesz $X + Y$, XY, F^{1867}, T^{1867}, FT, TF?

(c) Lineárisan függetlenek-e a T, F, FT, TF transzformációk?

(d) Hány dimenziós alteret generálnak az F pozitív kitevőjű hatványai?

7. Legyen A a térben az a z-tengely körüli 90 fokos forgatás, ami az x-tengelyt az y-tengelybe viszi, és B az a transzformáció, ami minden pontot tükröz a $(0,0,0)$ és $(1,1,1)$ pontokat összekötő egyenesre. Mi ezeknél az $(1,2,3)$ pont képe? Igaz-e, hogy $AB = BA$?

8. Legyen M az $y = x$ egyenesre való függőleges irányú vetítés mátrixa. Adjunk meg olyan K és L nem nulla, kétszer kettes valós mátrixokat, melyekre $KM = 0 = ML$.

9. Legyen $A, B, C \in \mathrm{Hom}(V)$ és λ skalár. Bizonyítsuk be az alábbi állításokat.

(a) $A + B$, λA és AB lineáris, $(-A) + A = 0$, $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.
(b) $(A + B)C = AC + BC$, $C(A + B) = CA + CB$, $A(\lambda B) = (\lambda A)B = \lambda(AB)$.

10. Álljon W a sík azon lineáris transzformációiból, amelyek az $(1, 1)$ pontot nullába viszik. Igazoljuk, hogy ez altér $\mathrm{Hom}(V)$-ben, és határozzuk meg a dimenzióját.

11. Egy vektortérben található 1526 olyan altér, hogy semelyik kettő sem izomorf, de ennél több nem. Hány dimenziós a vektortér?

---

12. Az alábbi M mátrixok esetében határozzuk meg a $v \mapsto Mv$ leképezés mag- és képterét, és ezek dimenzióját.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}$$

13. Az alábbi $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ leképezések közül a lineárisaknak határozzuk meg a mag- és képterét, és ezek dimenzióját.

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \quad \text{képe} \quad \begin{pmatrix}x-y\\y-z\\z-x\\0\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}x+y\\2x+z\\4x+2y+z\\y+z\end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix}xy\\yz\\zx\\0\end{pmatrix}.$$

14. Legyen W a V véges dimenziós vektortér tetszőleges altere. Igazoljuk, hogy V-nek létezik olyan lineáris transzformációja, amelynek W a magtere, és olyan is, amelynek W a képtere. Mikor van olyan transzformáció, amelynek W **egyszerre** a magtere és a képtere?

15. Igazoljuk, hogy $AB = 0$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$.

16. Mi az összefüggés A, B és AB magterei, illetve képterei között?

17. ***(*)*** Legyen V véges dimenziós vektortér, $A : V \to V$ pedig egy lineáris transzformáció. Ha $\mathrm{Im}(A^2) = \mathrm{Im}(A)$, következik-e ebből, hogy $\mathrm{Ker}(A^2) = \mathrm{Ker}(A)$? Igaz-e a megfordítás?

18. Egy $A : V \to W$ lineáris leképezés magtere 100-dimenziós, és $v_1, \ldots, v_{199} \in V$ független vektorok. Legalább hány különböző van az $A(v_1), \ldots, A(v_n)$ vektorok között?

19. Legyen $A \in \mathrm{Hom}(V_1, V_2)$. Melyek igazak?

(a) $\mathrm{Ker}(A) = V_1 \implies \mathrm{Im}(A) = \{0\}$.
(b) $\mathrm{Ker}(A) = \{0\} \implies \mathrm{Im}(A) = V_2$.
(c) $\mathrm{Im}(A) = V_2 \implies \mathrm{Ker}(A) = \{0\}$.
(d) Ha egy X vektorrendszer képe generátorrendszer, akkor X is az.
(e) Ha egy X vektorrendszer képe független, akkor X is az.
(f) Ha A szürjektív, akkor generátorrendszert generátorrendszerbe visz.
(g) Generátorrendszer képe generátorrendszer $\mathrm{Im}(A)$-ban.
(h) Ha A valamilyen halmazt generátorrendszerbe visz, akkor szürjektív.
(i) Ha A injektív, akkor független halmazt függetlenbe visz.
(j) Ha A egy bázist függetlenbe visz, akkor injektív.

20. ***(**)*** Ha $U, W \leq V$ és $A : U \oplus W \to V$, $(u, w) \mapsto u + w$, mennyi $\dim \mathrm{Ker}\, A$ és $\dim \mathrm{Im}\, A$?