

Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat
A 2. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása, 2. rész

1. VEKTORRENDSZER RANGJA

Az alábbi mátrixokban adjunk meg annyi lineárisan független oszlopot, ahányat csak lehet (ez az oszlopokból álló **vektorrendszer rangja**, és egyben a mátrix **oszloprangja**).

$$M_1 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad M_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad M_3 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad M_4 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad M_5 : \begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

Az M_4 oszlopai függetlenek, a rang 3. Az M_1 oszlopai összefüggenek, ezért 3 független oszlop nincs, de bármely két oszlop független, a rang 2. Az M_2 -nek is van két független oszlopa, de csak az első és a harmadik ilyen, a rang szintén 2. Az M_3 rangja is 2, itt két darab kételemű független rendszer van (az első és harmadik oszlopból álló rendszer nem független). Végül az M_5 rangja 1, mindegyik oszlop önmagában független, mert nem a nullvektor, de bármely két oszlop már összefügg. Csak a nullmátrixnak lesz nulla a rangja.

Emlékeztető: Egy vektorrendszer rangja akkor k , ha van k elemű független részhalmaz, de $k + 1$ elemű nincs. A fenti példákon látható, hogy sok k elemű független részhalmaz lehet. Fontos tétel, hogy **minden független részhalmaz kiegészíthető egy k elemű független részhalmazzá**, vagyis a maximális (azaz nem bővíthető) független részhalmazok mind k eleműek. Ennek oka, hogy a maximális független részhalmazok bázist alkotnak a vektorrendszer által generált altérben. Ezért a vektorrendszer rangjának az elegáns definíciója az, hogy **a rang a generált altér dimenziója**.

Vektorrendszer rangját úgy számíthatjuk ki, hogy a vektorokat koordinátázzuk, és a kapott mátrixra elvégezzük a Gauss-eliminációt. **A rang a karikák száma. Tetszőleges mátrix soraiból álló vektorrendszer rangja ugyanaz, mint az oszlopaiból álló vektorrendszer rangja.** Ezért ha a rang kiszámítása a cél, akkor (a determinánshoz hasonlóan) a sorokkal és az oszlopokkal is végezhetünk eliminációs lépéseket, a rang nem változik.

Egy $k \times n$ -es mátrix rangja legfeljebb $\min(k, n)$ lehet. A vektorrendszer rangját nemcsak a vektorok száma korlátozza, hanem az is, hogy hány dimenziós térből választjuk őket.

Határozzuk meg $\{x + 1, x^2 + 3x + 2, x^2 + 6x + 5\}$ rangját.

$$\text{Az } (1, x, x^2) \text{ bázisban } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} \textcircled{1} & 2 & 5 \\ 0 & \textcircled{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{ a rang 2.}$$

Másik megoldás: mindegyik polinomnak a foka legfeljebb kettő, ezért benne vannak egy háromdimenziós altérben. De mindnek gyöke a -1 , így az általuk generált altér legfeljebb kétdimenziós. Van közöttük két független, ezért ez az altér kétdimenziós, és így a rang 2.

Bizonyítsuk be, hogy $r(\{v_1, v_2, v_3\}) = r(\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\})$.

A két vektorrendszer ugyanazt az altérrel generálja, hiszen kölcsönösen egymás lineáris kombinációi. (Érdemes meggondolni, mennyivel bonyolultabb lenne azt megvizsgálni, hogy hogyan felelnek meg egymásnak a maximális független részhalmazok a két rendszer között.)

A II/12 (Seherezádés) feladat Freud, F4.7.5.

2. ALTEREK ÖSSZEGE

Legyenek U és W alterek egy V vektortérben. Melyik a legszűkebb altér, amely tartalmazza U és W összes elemét? Benne kell legyenek az $u + w$ alakú vektorok, ahol $u \in U$ és $w \in W$. Könnyű belátni, hogy ezek már alteret alkotnak. Ez az U és W **összege**, jele $U + W$. Például a sík bármely két különböző, origón átmenő egyenes összege, a tér pedig bármely két különböző, origón átmenő sík összege. De ha egy origón átmenő síkot, és egy olyan origón átmenő egyenest veszünk, amely nincs benne ebben a síkban, akkor a tér ennek a két altérnek az összege is. Ezek metszete nulladimenziós, míg két sík metszete egydimenziós.

Igazoljuk, hogy a véges dimenziós esetben $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$.

Útmutatás. Vegyük $U \cap W$ egy bázisát, egészítsük ki U egy bázisává, majd W egy bázisává. Bizonyítsuk be, hogy a kapott vektorok együtt $U + W$ bázisát alkotják (*Freud, F4.6.6*).

Adjuk meg \mathbb{R}^4 megadott két-két alterének összegét és metszetét. (a) Az első három, illetve az utolsó három koordináta ugyanaz. (b) Az első három, illetve az utolsó három koordináta összege nulla. (c) Minden koordináta egyenlő, illetve a koordináták összege nulla.

Általában a metszet meghatározása a könnyebb. Az (a) esetben a metszetben azok a vektorok vannak, amelyeknek mind a négy koordinátája egyenlő, ez nyilván egydimenziós. Az összeg meghatározásához adjuk össze a két altér egy-egy tipikus elemét, de **vigyázzunk arra, hogy ezek felírásakor különböző betűket használjunk!**

$$(a, b, b, b)^T + (c, c, c, d)^T = (a + c, b + c, b + c, b + d)^T$$

(helyspórolás végett az oszlopvektorokat sorvektorok transzponáltjaként írtuk fel). Így a két altér összegének elemei az $(a + c, b + c, b + c, b + d)^T$ alakú vektorok, ahol $a, b, c, d \in \mathbb{R}$.

Ez a válasz korrekt, de nem az igazi. Ebből a képletből még a dimenziót sem tudjuk könnyen leolvasni, ha pedig valaki arra kíváncsi, hogy egy adott vektor benne van-e ebben a halmazban, annak lineáris egyenletrendszerrel kell megoldania. Az „igazi” válasz az, hogy az összeg azokból a vektorokból áll, melyeknek a két középső koordinátája megegyezik.

Ezt meg tudjuk mutatni úgy, hogy az $(a + c, b + c, b + c, b + d)^T = (x, y, y, z)$ egyenletrendszerrel megoldjuk az a, b, c, d ismeretlenekre, ahol x, y, z tetszőleges paraméterek.

Az elegáns megoldás a következő. Az összeg dimenziója a fenti képlet szerint $2 + 2 - 1 = 3$. Ez nyilván altere azon vektorok szintén háromdimenziós terének, amelyek két középső koordinátája egyenlő. A valódi altér dimenziójáról szóló tétel szerint tehát ez a két altér egyenlő.

A (b) esetben a metszet kétdimenziós és a $(-b - c, b, c, -b - c)^T$ alakú vektorokból áll, az összeg pedig \mathbb{R}^4 , hiszen $3 + 3 - 2 = 4$ -dimenziós. A (c) esetben a metszet $\{0\}$, az összeg \mathbb{R}^4 .

Egy tízdimenziós térben U_1, U_2, U_3 kilencdimenziós alterek. Mekkora lehet a metszetük dimenziója? Adjunk példát minden lehetséges értékre.

Mivel $U_1 \neq U_2$, az összegük valódi módon tartalmazza mindkettőt, ezért legalább tízdimenziós, és így az egész tér. Ezért $U_1 \cap U_2$ dimenziója $9 + 9 - 10 = 8$. Ha U_3 tartalmazza $U_1 \cap U_2$ -t, akkor $U_1 \cap U_2 \cap U_3 = U_1 \cap U_2$. Ha nem, akkor $(U_1 \cap U_2) + U_3$ valódi módon tartalmazza U_3 -at, ezért az egész tér, és akkor $\dim(U_1 \cap U_2 \cap U_3) = 8 + 9 - 10 = 7$.

Példák: A második esetre \mathbb{R}^{10} -ben az $x_1 = 0$, az $x_2 = 0$ és az $x_3 = 0$ egyenlettel megadott altér. Az elsőre az $x_1 = 0, x_2 = 0, x_1 + x_2 = 0$ alterek. Ezeket úgy lehet megtalálni, hogy az eredeti feladatot kisebb számokkal próbáljuk megoldani, vagyis a háromdimenziós térben kétdimenziós alterekkel, azaz síkokkal kísérletezünk.