Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

A 2. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása, 1. rész

1. Koordinátarendszer, bázis

Emlékeztető: Egy koordinátarendszer azt teszi lehetővé, hogy általános vektorok (pontok, polinomok) helyett oszlopvektorokkal számoljunk. A félév egyik fő célja az, hogy megtanuljuk, hogyan választható egy-egy feladathoz alkalmas koordinátarendszer.

A koordinátarendszer tengelyeit egy-egy vektorral adjuk meg, legyenek ezek $b_1, \ldots, b_n$. (Egyelőre sem a távolság, sem a szög fogalmát nem értelmezzük.) Azt szeretnénk, hogy minden v vektor **egyértelműen felírható** legyen $\lambda_1 b_1 + \ldots + \lambda_n b_n$ alakban alkalmas skalárok segítségével. Az ilyen $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ vektorrendszereket **bázis**nak nevezzük. Ekkor

$$[v]_{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$$

a v **koordinátavektora** a $\mathbf{b}$ bázisban (helyspórolás végett $[\lambda_1, \ldots, \lambda_n]^T$ alakban írhatjuk). A bázisvektorok sorrendje fontos, ha cserélgetjük őket, akkor a koordináták és cserélődnek.

Az egyértelműség akkor teljesül, ha $b_1, \ldots, b_n$ **független**, a felírhatóság pedig akkor, ha generálja az egész vektorteret, azaz **generátorrendszer.** Sok bázis van, de ezek mind ugyanannyi vektorból állnak, ez a vektortér **dimenziója.** Fontos, hogy a dimenziót intuitíven le tudjuk olvasni, mielőtt bázist kezdenének keresni. Ebben segítenek a következő példák.

Ha egy autópályán haladunk, és valaki telefonon megkérdezi, hogy hol járunk, akkor elég annyit mondani neki, hogy az M7-esen a 90-es kilométerkőnél. Ha egy hegységben bolyongunk, akkor már két számot kell megtelefonálni: a GPS-koordinátákat. Ha pedig helikopteren ülünk, akkor még a magasságot is. Vagyis az autópályán egy szám jelöli ki a helyzetünket, a föld felszínén két szám, a térben pedig három szám. Ezért az autópálya egydimenziós, a felszín pedig kétdimenziós. Vagyis ha a partnerünk is ismeri a vektorteret, amiben dolgozunk, akkor a dimenzió azt jelenti, hogy *hány számot kell megtelefonálni neki, hogy ki tudja találni azt a konkrét vektort, amire gondolunk.* Fontos hangsúlyozni, hogy ez csak intuíció, ha biztosak akarunk lenni a dimenzió értékében, akkor bázist kell keresni.

Hány dimenziós a legfeljebb másodfokú, valós együtthatós polinomok vektortere $\mathbb{R}$ fölött?

Az $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ polinom esetében három számot érdemes megtelefonálni: az együtthatókat. Ezért a dimenzió várhatóan 3 lesz. Bázist úgy kereshetünk, hogy a polinomot *olyan lineáris kombinációra bontjuk, ahol az együtthatók a megtelefonálandó számok.* Az f polinom már eleve így van felírva, ezért várhatóan $1, x, x^2$ lesz bázis. Ez tényleg bázis, hiszen minden legfeljebb másodfokú polinom egyértelműen írható ezek lineáris kombinációjaként.

Hány dimenziós $\mathbb{R}^{2\times 2}$ az $\mathbb{R}$ fölött?

A mátrix négy elemét érdemes megtelefonálni. Ha bázist keresünk, akkor egy általános mátrixot kell olyan lineáris kombinációra bontani, ahol az együtthatók a mátrix elemei.

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Ez a négy mátrix könnyen láthatóan bázist alkot, a dimenzió 4.

Hány dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}^{2\times 2}$ szimmetrikus mátrixai?

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & d \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \text{azaz } 3.$$

Hány dimenziós a komplex számok vektortere $\mathbb{R}$ fölött?

A „fölött” szó arra utal, hogy valós számokat telefonálhatunk, a $c + di$ esetében a c és d számokat érdemes. Nyilván 1 és i bázist alkot, a dimenzió 2.

2. Bázis keresése

Olyan tételeket ismételünk át, amelyek lerövidíthetik annak ellenőrzését, hogy egy vektorrendszer bázis-e. Különösen az lehet számolós, hogy generátorrendszerről van-e szó.

Bázist alkot-e a síkon $(1,1)$ és $(1,2)$?

A két vektor független, hiszen nem egymás skalárszorosai. Azt kell ellenőrizni, hogy minden (a,b) előáll-e $\lambda_1(1,1)+\lambda_2(1,2)$ alakban. A kapott egyenletrendszer $\lambda_1+\lambda_2 = a$, $\lambda_1+2\lambda_2 = b$. Ez lineáris, a Gauss-elimináció is működik, de a jobb oldalon paraméterek vannak. Van megoldás, $\lambda_1 = 2a - b$ és $\lambda_2 = b - a$, ezért $(1,1)$ és $(1,2)$ bázis.

(1) **Egy n-dimenziós vektortérben minden n elemű független rendszer bázis.**
(2) **Egy n-dimenziós vektortérben minden n elemű generátorrendszer bázis.**
(3) **Egy n-dimenziós vektortér minden *valódi altere* legfeljebb $n-1$-dimenziós.**
(4) **Ha egy vektortérben van k független vektor, akkor a dimenzió legalább k.**
(5) **Ha egy vektortér generálható k vektorral, akkor a dimenzió legfeljebb k.**

A sík kétdimenziós, hiszen $(1,0)$, $(0,1)$ bázis. Az $(1,1)$ és $(1,2)$ függetlenek, és két darab, tehát ez is bázis a fenti (1) állítás miatt. A paraméteres Gauss-eliminációra nincs szükség.

Hány dimenziós alteret alkotnak $\mathbb{R}$ fölött azok a legfeljebb harmadfokú, valós együtthatós polinomok, melyeknek gyöke az 1?

Az $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ polinom négy együtthatója közül most nem kell mind a négyet megtelefonálni, hiszen a partnerünk is tudja, hogy $f(1) = a_0 + a_1 + a_2 + a_3$ értéke nulla, ezért ha három együtthatót ismer, akkor a negyediket ki tudja számolni. Ezért azt tippelhetjük, hogy a dimenzió 3. Tehát három polinomot kell keresni, amik bázist alkotnak, **mindegyiket ebből az altérből,** azaz gyökük kell, hogy legyen az 1.

Az I/4. feladat szerint különböző fokú polinomok rendszere független. Ezért például $x-1$, $x(x-1)$, $x^2(x-1)$ függetlenek. Két megoldást is adunk arra, hogy bázist alkotnak.

Az f polinom $(x-1)(bx^2+cx+d)$ alakban írható, hiszen a gyöktényező kiemelhető, és ezért $x-1$, $x(x-1)$, $x^2(x-1)$ egy lineáris kombinációja. Ezért ez a három polinom generátorrendszert alkot. Ez a megoldás csak erre a konkrét bázisra működik.

A második megoldásban észrevesszük, hogy a vektorterünk dimenziója legalább 3, hiszen van három független vektor. Továbbá valódi altere a legfeljebb harmadfokú polinomok négydimenziós vektorterének, hiszen például az x polinom nincs benne. Ezért dimenziója kisebb, mint 4. Így csak 3 lehet. De akkor a kiválasztott háromelemű független rendszer bázis. (Menet közben intenzíven használtuk a fenti öt tételt.)

Ha már tudjuk, hogy a dimenzió 3, akkor bármely három független polinom bázist alkot. Például $x-1$, $(x-1)^2$, $(x-1)^3$ is bázis. Érdemes bebizonyítani ezzel a technikával, hogy minden polinom felírható $(x-1)$ polinomjaként is (vö. iterált Horner, Taylor-polinom).

Hány dimenziós U alteret alkotnak $\mathbb{R}$ fölött azok a legfeljebb negyedfokú, valós együtthatós polinomok, melyeknek gyöke az 1 és a 2 is?

Itt $(x-1)(x-2)$, $(x-1)^2(x-2)$, $(x-1)^3(x-2)$ függetlenek, hiszen különböző a fokuk, és így a dimenzió legalább 3. Ez is valódi altér, ezért a dimenzió kisebb, mint 5 (ami a legfeljebb negyedfokú polinomok V terének dimenziója.) Hogyan döntsük el, hogy 3 vagy 4-e a helyes?

Iktassunk közbe egy W alteret, legyen ez azoknak a legfeljebb negyedfokú polinomoknak a halmaza, melyeknek gyöke az 1. A W-ben benne van $x-1$, aminek 2 nem gyöke, ezért U valódi altere W-nek. Az x polinom mutatja, hogy W valódi altere V-nek. Ezért kettőt kell legalább lelépnünk 5-ről, azaz a helyes válasz a 3.

3. További feladatok

1. Melyik bázis $\mathbb{R}^3$-ben? (a) $\{(1,2,3),\ (1,2,4),\ (1,2,5)\}$; (b) $\{(1,2,3),\ (0,1,0),\ (3,2,1)\}$; (c) $\{(1,1,1),\ (1,2,4),\ (1,3,9)\}$; (d) $\{(1,2,3),\ (4,5,6),\ (7,8,9)\}$. Mik $(1,0,0)$ koordinátái?

A fenti (1) tétel miatt elég a függetlenséget ellenőrizni, amit például úgy tehetünk meg, hogy a vektorokat egy mátrix oszlopaiba írjuk, és megnézzük, hogy ennek determinánsa nulla-e. Az (a) eset azért érdekes, mert semelyik két vektor sem összefüggő, de lesz két sor, ami egymás skalárszorosa. A (b) determinánst fejtsük ki aszerint az oszlop szerint, amelyben két nulla is van. A (c) esetben Vandermonde-determinánsról van szó. Az $(1,0,0)$ koordinátáit lineáris egyenletrendszer megoldásával kapjuk.

2. Határozzuk meg az alábbi vektorterek dimenzióját, és adjunk meg egy-egy bázist.

(1) A legfeljebb n-edfokú $\mathbb{C}$ feletti polinomok $\mathbb{R}$ felett. Mi általában az összefüggés egy vektortér $\mathbb{R}$ és $\mathbb{C}$ feletti dimenziója között?
(2) Azon legfeljebb n-edfokú $\mathbb{Q}$ feletti polinomok $\mathbb{Q}$ felett, melyeknek $\sqrt{2}$ gyöke.
(3) Az $\mathbb{R}^n$ azon elemei $\mathbb{R}$ felett, ahol az első koordináta is, a koordináták összege is 0.

Az (1) esetben minden együtthatóhoz két valós számot kell megtelefonálni. Bázis például $1, i, x, ix, \ldots, x^n, ix^n$. A valós fölötti dimenzió kétszerese a komplex fölöttinek.

A (2) nehezebb, a dimenzió $n-1$, bázis például $(x^2-2)x^i$, ahol $0 \leq i \leq n-2$. A kulcs annak észrevétele, hogy ha egy racionális együtthatós polinomnak gyöke a $\sqrt{2}$, akkor gyöke a $-\sqrt{2}$ is. (Ha $\sqrt{2}$-t behelyettesítünk, akkor válasszuk szét a páros és páratlan fokú tagokat.) Ez hasonló ahhoz, hogy ha egy valós együtthatós polinomnak gyöke az i, akkor a $-i$ is.

A (3) esetén is kettőt kell lelépnünk az n-dimenziós $\mathbb{R}^n$ vektortérből, az eredmény $n-2$. Az $n-2$ darab független vektor megadása történhet úgy, hogy az $x^2-x, x^3-x, \ldots, x^n-x$ független polinomrendszer koordinátáit vesszük a szokásos bázisban.

3. Hány $n-1$-dimenziós altere van egy $\mathbb{R}$ fölötti n-dimenziós vektortérnek $n \geq 2$ esetén?

Végtelen sok. Legyen $b_1, \ldots, b_n$ bázis, és mutassuk meg, hogy a $\langle b_1, \ldots, b_{n-2}, b_{n-1} + \lambda b_n \rangle$ alterek páronként különbözők, és $n-1$-dimenziósak. Ez a feladat hasonló ahhoz, ahogy végtelen sok alteret konstruáltunk minden valós fölötti kétdimenziós altérben.

4. ***(*)*** Egy $\mathbb{R}$ fölötti vektortérben egy 100 elemű vektorrendszer elemei közül bármely 21 darab összefüggő. Legalább hány olyan vektor van a rendszerben, ami függ a többitől?

81. Egy F maximális független részrendszernek legfeljebb 20 eleme lehet, és minden más vektor függ tőle. Ha $0 \neq v \notin F$, akkor v-nek F-fel való felírásából F egyik eleme kifejezhető. A 81 megvalósítható: legyen $b_1, \ldots, b_{20}$ bázis és a többi vektor b_{20}-nak skalárszorosa.