főegyütthatós valós, $+$-ra zárt?

$(x^2+i)+(-x^2)=i$ ellenpélda.

---

páros fokú tag:

$(x^2+1)+(x+1) = x^2+x+2$

páratlan fokú tag.

$\left.\begin{array}{l} 3u+2v \in W \\ 2u+3v \notin W \end{array}\right\} \Rightarrow$ u, v hol lehet?

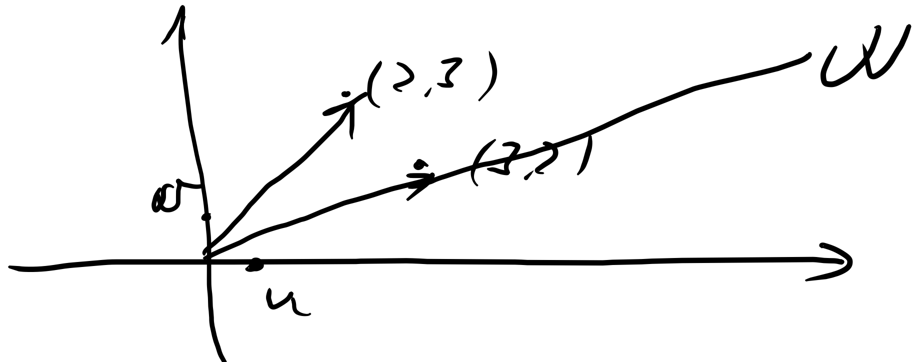
$\forall 2$ bent és $2u+3v$ is bent lenne.

u bent, v kint $\quad \underset{u \text{ bent}}{3u} + 2v$ bent $\Rightarrow 2v$ bent $\Rightarrow \frac{1}{2}(2v)$ bent.

($\mathbb{Z}_2$ fölött nem!)

Hasonló: u kint v bent és

$\forall 2$ kint: lehet. $\quad u=(1,0)$, $v=(0,1)$

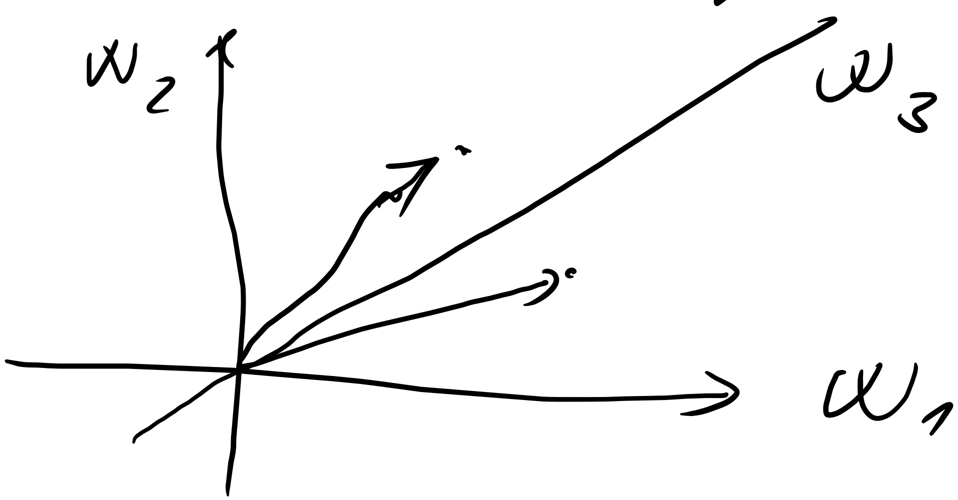


W kellene : $3u+2v$ bent
$2u+3v$ kint

$\left.\begin{array}{l} 2u+3v \\ 3u+2v \end{array}\right\}$ kint

u, v nem lehet
$\forall_2$ bent.

A többi lehetséges.



$\le n-2$ $\quad$ $\le n-1$ $\quad$ n

$\mathbb{R}^n$

kell $n-2$ F $\Rightarrow \ge n-2$

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ $\quad$ $\begin{bmatrix}1\\0\\ \vdots\\0\end{bmatrix}$ első koord 0

$\boxed{n-2}$ első koord 0 és $\Sigma = 0$

$\begin{bmatrix}0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\\-1\end{bmatrix}$ $\dots$ $\begin{bmatrix}0\\0\\1\\-1\end{bmatrix}$

Gyöke $\sqrt{2}$: 2-vel csökkenti a dim-ót.

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad a, b, c \in \mathbb{Q}$

$a \cdot 2 + b\sqrt{2} + c = 0 \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2a + c = 0 \\ b = 0 \end{matrix}\right\}$ ($\sqrt{2}$ irrac)

HF $f \in \mathbb{Q}[x]$ $\quad f(\sqrt{2}) = 0 \iff x^2 - 2 \mid f$ ($\mathbb{Q}$ fölött)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

oszlopok ÖF

3 F nincs

van-e 2 db?

VAN ∀ 2 alapján!

$\boxed{\text{rang} = 2}$

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ v_1 \quad v_2 \quad v_3 \end{array}$$

3 nincs

v_1, v_2 ÖF , v_2, v_3 ÖF

de v_1 és v_3 F

$\boxed{\text{rang} = 2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

3 nincs

v_1, v_3 ÖF , v_2, v_3 F

v_1, v_2 F

$\boxed{\text{rang} = 2}$

<u>Tétel</u> ∀max F elemszáma ugyanaz: a rang

$L\{x-1,\ x^2-3x+2,\ x^2-6x+5\} = ?$

($\forall$ 2 F) a kérdés: a 3 pol. F-e.

$$\begin{array}{c}x^2\\x\\1\end{array}\begin{bmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & -3 & -6\\ -1 & 2 & 5\end{bmatrix}$$

$x-1 \quad x^2-3x+2 \quad x^2-6x+5$

kanonikusan:

Ha 3 db 1 $\Rightarrow$ F

≤ 2 db 1 $\Rightarrow$ ÖF

2 db 1 lesz ÖF.

---

1 Gauss-elim. elég: rang = 1-ek száma.

II. m.o. $\forall$ 3 polinomnak gyöke az 1

$\Rightarrow$ benne vannak egy valódi altérben

a ≤ 2 fokúak között.

3 dim $\Rightarrow$ ≤ 2 dim.

II / 5.

$$r(v_1, v_2, v_3) = r(v_1 - 3v_2, v_2, v_3)$$

a gen. altér ugyanaz!

$$\langle v_1, v_2, v_3 \rangle \overset{?}{=} \langle v_1 - 3v_2, v_2, v_3 \rangle \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ dim is egyenlő. (a rang).

Rangszámításban eliminációs lépéseket az oszloppal és a sorral is szabad! (mint a determinánsnál)

II/6 100 db $\forall 21$ öf.

Legalább hány db van, ami függ a többitől?

X max F halmaz.

$|X| \leq 20$ nyilván.

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{X \\ \leq 20 \\ \text{pont } 20}} \; \underbrace{0, 0, \ldots\ldots, 0}_{\substack{\text{többi} \\ \geq 80}}$

$\nearrow$ ezek függenek a többitől (már X-től is)

CSALÁS!! nem 100, hanem 21 vektor.

$\overbrace{\underbrace{\qquad\qquad}_{X}}^{20 \text{ db}}$ $\overbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}^{\leq 1 \text{ db } 0 \qquad \exists v \neq 0}$

$v_1 \text{———} v_{20}$ $v_1 \longrightarrow v_{20}, v$ öf

81

$\sum \lambda_i v_i - 1 \cdot v = 0$

(mivel $v \neq 0$ $\Rightarrow \exists i \Rightarrow \lambda_i \neq 0$
v_i „kif-ható”

II / 10. $\mathbb{R}$ $n \geq 2$

hány $n-1$ dim altér?

(hipersík).

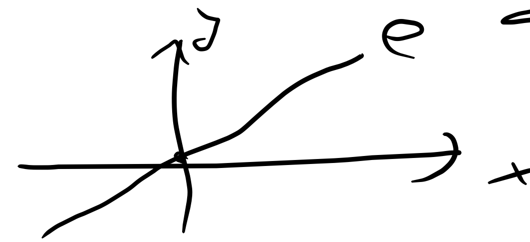
$n=2$ hány egyenes a síkban? ∞

origón át

$n=3$ ∞ sok sík van.

ált. $n \to \infty$ ∞ sok?

e ∞ sok



$\langle z, e \rangle$ is lesz.

$$\langle \underbrace{b_1, \ldots, b_{n-3}, b_{n-2}}_{n-2 \text{ dim}}, e \rangle$$

$e = ?$ Pl. $\underbrace{e = b_{n-1} + \lambda b_n}_{\lambda \neq 0 \text{ is.}}$

$b_1 \ldots b_n$ bázis V-ben.

$U, W \leq V$

$\uparrow$ altér.

$U \cap W$: [illegible]

$U + W = \{ u + w \mid u \in U, w \in W \}$.

$$U = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\} \quad 2$$

$U \cap W$:

$\forall$ 4 egyenlő

$$\left\{ \begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ a \end{bmatrix} \middle| \; a \in \mathbb{R} \right\}$$

1

$$W = \left\{ \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} \middle| \; a, b \in \mathbb{R} \right\}$$

2 dim.

$$\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$$

$$\dim(U+W) = 2 + 2 - 1 = \boxed{3}$$

~~$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a \\ b \\ b \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a \\ a+b \\ a+b \\ 2b \end{bmatrix}$$~~

~~Tehát $U+W \overset{?}{=} \left\{ b \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R} \right\}$~~

~~2 dim ?!?!~~

BAJ!

$$U+W = \{ u+w \mid u \in U \text{ és } w \in W \}$$

az összes lehetséges módon.

CSUPA kül betűt!

$$\begin{bmatrix} a \\ a \\ a \\ b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \\ d \\ d \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a+c \\ a+d \\ a+d \\ b+d \end{bmatrix} \;\middle|\; a,b,c,d \in \mathbb{R} \right\}$$

jó, dim =?

(két középső egyező!)

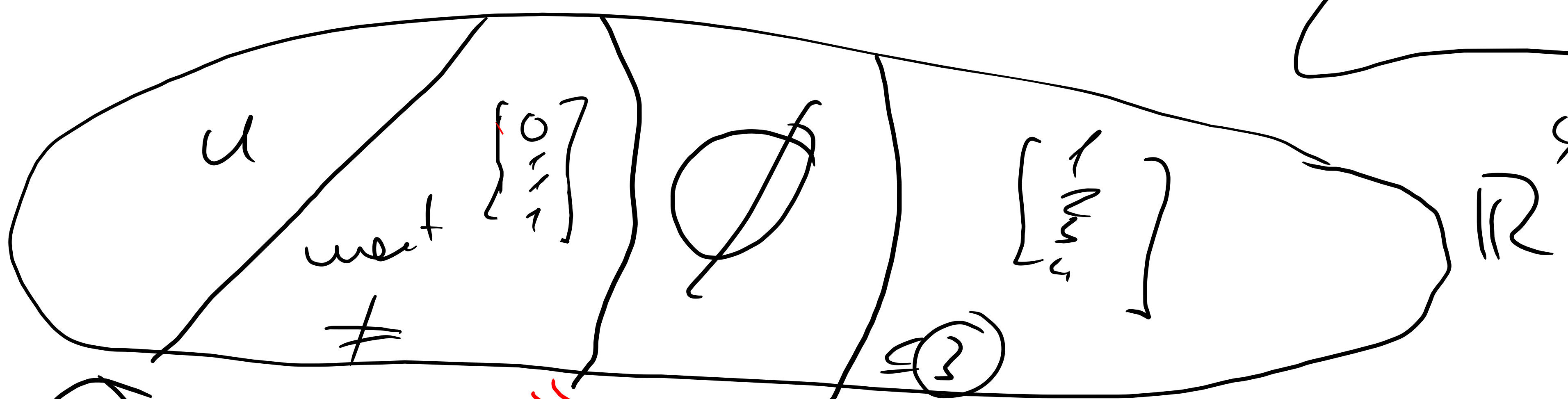
?? $U+W = \left\{ \begin{bmatrix} x\\ y\\ y\\ z \end{bmatrix} \middle| \; x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$

③-dim

"Biz:"

$$\left.\begin{aligned} a + c &= x \\ a + d &= y \\ b + d &= z \end{aligned}\right| \quad a,b,c,d\text{-re megoldható?}$$

Gauss-elim ✓



$U+W$ ② ≥ 3 $= \left\{ \begin{bmatrix} x\\ y\\ y\\ z \end{bmatrix} , x,y,z \in \mathbb{R} \right\}$

II/7/ 5, 6, 1F.

$\dim(U+W) = \dim U + \dim(W) - \dim(U \cap W)$

II/8

V 10-dim

W_1, W_2, W_3 5-dim

$\dim(W_1 \cap W_2 \cap W_3)$ mi lehet.

$$W_1 \cap W_2 \cap W_3 = (W_1 \cap W_2) \cap W_3$$

A feladat egyszerű változata:

$\dim(W_1 \cap W_2)$ mi lehet?

$$\underset{\underset{9}{\wedge\!\shortparallel}}{\dim(W_1 \cap W_2)} = \dim \underset{\underset{5}{\shortparallel}}{W_1} + \dim \underset{\underset{5}{\shortparallel}}{W_2} - \dim(W_1 + W_2) \geq 5+5-10 = \boxed{0}.$$

$\dim(W_1 + W_2) \leq 10$

0 vagy 5, akkor 0 ha $\dim(W_1 + W_2) = 10$.

$W_1 = W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = W_1 = W_2$ $\boxed{5}$. $\forall$ van eztre
$W_1 + W_2 > W_1, W_2$
$\Rightarrow$ van V lehet $\Rightarrow \boxed{0}$