∀2 F ∀3 ÖF 4 db.

$$\underbrace{v_1, v_2, v}_{\text{öf}} \Rightarrow v \in \langle v_1, v_2 \rangle$$

F

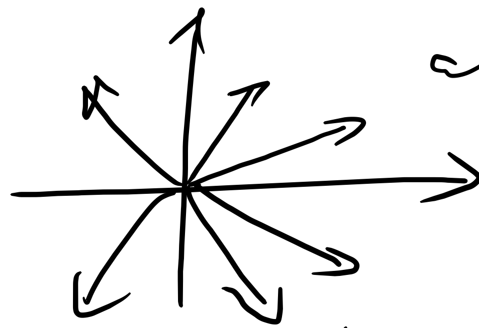
∀v-re a rendszerben.

$\Rightarrow$ ∀4 vektor $\in \langle v_1, v_2 \rangle$ altérben (2-dim.)

Vegyünk egy 2-dim. alteret.

Pl. a sík.

akárhányat is lehet.



(1, 1, 0)
(1, 0, 0)
(0, 1, 0)
(1, -1, 0)

$\{(a, a+d, a+2d) \mid a, d$ tetszőleges$\}$ is 2-dim. altér.

$\{v_1, v_2, v_1+v_2, v_1-v_2\}$ is jó pl.

I/14 $\mathbb{R}^{2\times 2}$

(9) Σ elemek $= 0$ altér ✓

(10) Π –"– $= 0$ NEM

$\Updownarrow$

van benne 0

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$ NEM

---

(11) Σ elemek $= 3$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ nincs benne. NEM

(12) Σ elemek$^2 = 0 \Rightarrow \forall$ elem 0

$\mathbb{R}$ felett $\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$ IGEN.

$\mathbb{C}$ felett nem altér

$$\begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 1+i \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Konyhaszabály: altér megadni homogén lineáris feltételek.

ℂ

ℝ felett altér

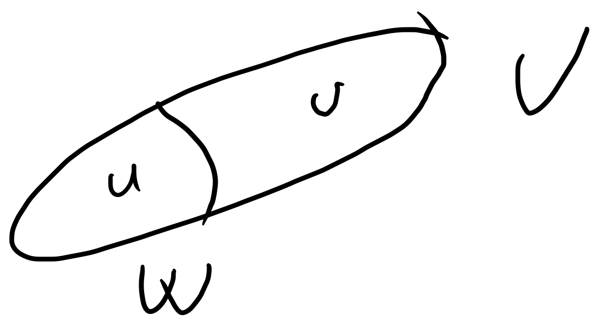
ℂ felett van

$i \in W$

$i \cdot i \notin W$.

I/15.

(1)



$u+v$ bent van a Ezt.

INDIREKT!

Ha $u+v \in W$

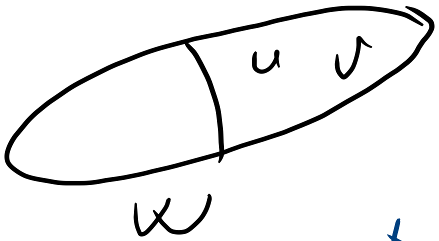
$u \in W$

$(u+v)-u \in W$

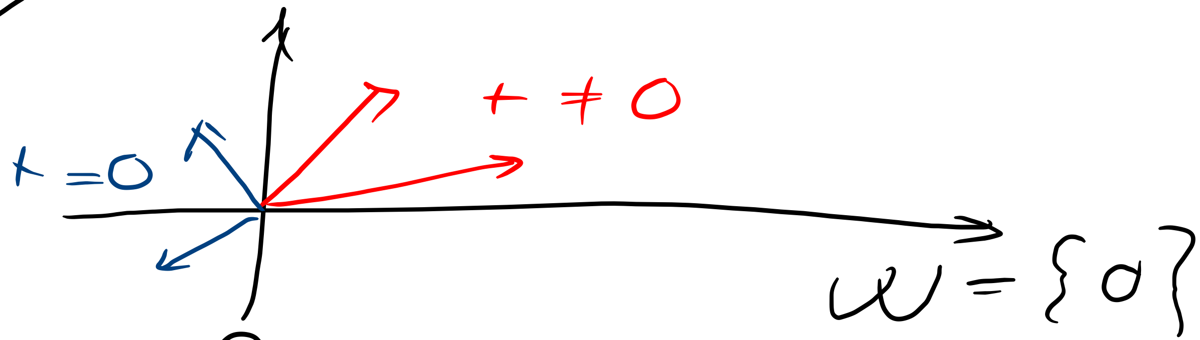
$\| \; v \notin$.

$\Rightarrow$ $u+v$ biztosan KINT.

$u, v \notin W$



$\forall 2$ lehet, példa kell.



2db ≠ 0 vektor összege lehet-e 0

lehet-e ≠ 0

$2u + 6v \in W$ két "F" kondíció

$3u + v \in W$

$3(2u+6v) - 2(3u+v) = ?\,v$ (kiküszöbölt u).

$\in W$ $\Rightarrow v \in W$

$18 - 2 = ? \neq 0$

$u = \frac{1}{2}(2u+6v-6v) \in W.$

$\forall 2$ benne van.

$2u+6v \in W$

$(3u+5v \in W)$ van új info.

Előző volt hogy $3u+9v = \frac{3}{2}(2u+6v)$

Példa $W = \{0\}$ $\mathbb{R}[x] = V$

$u = v = 0 \Rightarrow 2u+2v$ is benne van.

HF (Lehet csak az origó W-ben?)

Lehet, hogy $u, v \notin W$

$u = 6x$ $v = -2x$

$2(6x) + 6(-2x) = 0 \in W$

T/16 $\langle x, x^2+2, x+2 \rangle \overset{?}{=} \langle 1, x+1, x^2+1 \rangle$

$\left.\begin{matrix} x \\ x+2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow 2 \in \Rightarrow 1$ is

$\left.x^2+2\right\} \Rightarrow x^2$ is

$1, x, x^2 \in$

$\Rightarrow \mathrm{I} \subseteq \mathrm{II}$ ≤ 2 oldalú.

II is

$\left.\begin{matrix} x+1 \\ 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x \in$

$\left.\begin{matrix} x^2+1 \\ 1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow x^2 \in$

✓

I/17

$a \notin \langle b, c \rangle$ és $c \in \langle a, b \rangle$

$b \notin \langle a, c \rangle$ $\quad c = ?$

$c = \alpha a + \beta b$

Ha $\alpha \neq 0 \Rightarrow a = 1/\alpha\,(c - \beta b)$

$a \in \langle b, c \rangle$ ↯ $\Rightarrow \alpha = 0$

Hasonlóan $\beta \neq 0$

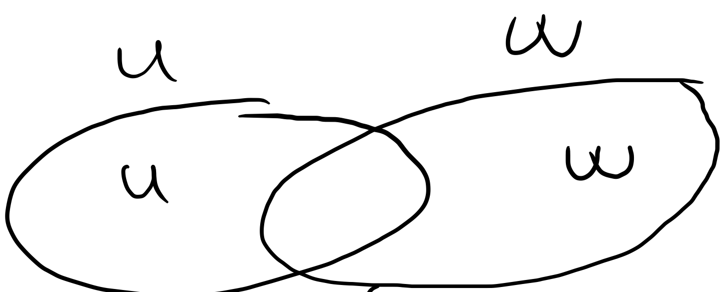
$\Rightarrow c = 0$. $\quad \forall a, b$-re jó $c = 0$-val.

I/22.

Ha $\exists\, u, w$

$\Rightarrow$ ↯

$U \cup W$ mikor altér?



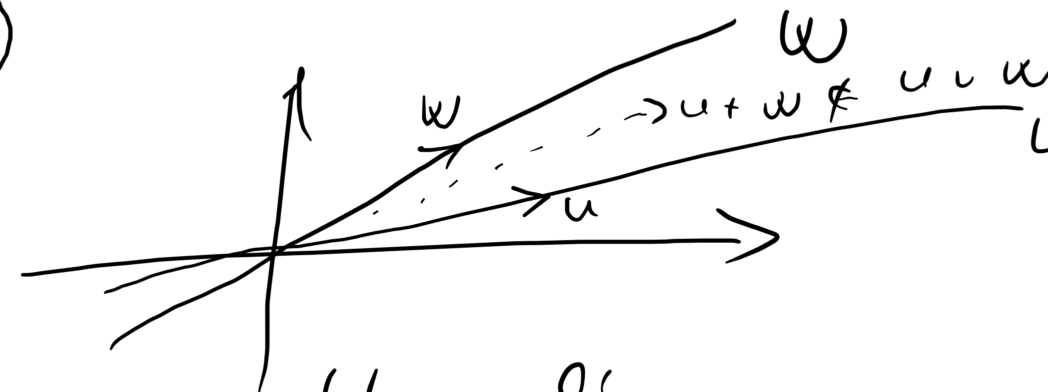
$u \in U$ és $u \notin W$

$w \in W$ és $w \notin U$ $\Rightarrow$

$u + w \notin U \cup W$

Ha $u + w \in U \Rightarrow w \in U$ ↯

$u \in U$



Hasonlóan $u + w \notin W$. ↯

Belátható: Ha $U \cup W$ altér.

$\Rightarrow$ minden benne $u \Rightarrow U \subseteq W \Rightarrow U \cup W = W$

vagy

minden benne $w \Rightarrow W \subseteq U \Rightarrow U \cup W = U$

(fordítva is). $U \cup W$ altér, ha

az egyik része a másiknak.

Bázis $B = (b_1, \dots, b_n)$ $\quad [v]_B = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix}$

$v = \lambda_1 b_1 + \dots + \lambda_n b_n$

Bázis: F és G

Sík $\{(1,1),(2,2)\}$ B? NEM, mert ÖF

$\{(0,1),(1,1)\}$ B? F ✓

G? (a,b) TETSZ. $(a,b) \overset{?}{=} \lambda(0,1) + \mu(1,1)$

$\exists?\ \lambda, \mu$.

$$(a,b) = \lambda(0,1) + \mu(1,1)$$

$$a = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1$$
$$b = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 1$$

$$\begin{array}{cc} \lambda & \mu \\ \end{array}$$
$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right]$$

Gauss-elim.

Paraméteres!

$$\left[\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 1 & 1 & b \end{array}\right]$$

Kész ∃ m.o., mivel tilos sor

Igen, a.

$$(a,b) = \lambda(1,1) + \mu(2,2)$$

$$a = \lambda + 2\mu$$
$$b = \lambda + 2\mu$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & a \\ 1 & 2 & b \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a \\ 0 & 0 & b-a \end{array}\right] \longleftarrow \text{TILOS sor?}$$

STOP Igen $\Longleftrightarrow b - a \neq 0$

$\langle (1,1), (2,2) \rangle$ elemei (a,a) $\forall a$.

$\forall b, a$-ra nem

pl $b = 1$, $a = 2$

$\neq 0$

B = F és G

(0,1) és (1,1)   B → ?
nem F ✓

G lefott elég: 2db !!!

$\forall$ n-dim, $b_1, \ldots, b_n$ F $\Rightarrow$ bázis.
G $\Rightarrow$ bázis

Biz

ndb
F $\Rightarrow$ max. F, tehát B
dim = n

n db
G $\Rightarrow$ min G, tehát B.
dim = n

$(1,1)$, $(1,-1)$ F, 2db $\Rightarrow$ B

$\frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$, $\frac{1}{\sqrt{2}}(1,-1)$ F 2db $\Rightarrow$ B

$$[(1,2)]_{((0,1),(1,1))} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$x(0,1) + y(1,1) = (1,2)$

$y = 1$, $x + y = 2 \Rightarrow x = 1$

Ell:

$(0,1) + (1,1) = (1,2)$ ✓

$(1,2,3)$, $(1,2,4)$, $(1,2,5)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

oszlopok F $\Leftrightarrow$ det $\neq 0$

0 a det, mert

a 2. sor az első 2x-ese!

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{pmatrix}$$

det Vandermonde!

$\forall$ oszlop mértani sorozat

(Interpoláció)

$(1-2)(1-3)(2-3) \neq 0.$ F $\Rightarrow$ B.

DIMENZIÓ. (Szóbeli elbuktatna)

Dim = az a szám, hogy hány számot kell meghatároznunk ha a tér egy elemét át akarjuk adni!

Példa. $\mathbb{C}$ az $\mathbb{R}$ felett

$a+bi$ a, b kell két valós számot.

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = 2.$

Bázis $= \{1, i\}$ $a+bi$ [illegible] $a+bi$

F G

≤ 3 fokú $\mathbb{R}$ fölött

$a + bx + cx^2 + dx^3$

négy valós kell: a, b, c, d.

dim $= 4$.

B $1, x, x^2, x^3$ bázis F + G

$\forall$ pol egyért. előáll. kaab.

≤ 2 fokú $\mathbb{C}$ együtthatós, $\mathbb{R}$ fölött

$z_1 + z_2 x + z_3 x^2 \quad z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$.

Hány VALÓSAT kell megadni?

6-ot $\forall$ együtthatóhoz 2-t

$(a_1 + b_1 i) + (a_2 + b_2 i) x + (a_3 + b_3 i) x^2 =$

B? $= a_1 + b_1 i + a_2 x + b_2 (x i) + a_3 x^2 + b_3 (i x^2)$

Sugallja B: $1, i, x, ix, x^2, ix^2$

F G H.

polinomok $\leq 3.$ fokú

gyöke a 2

$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ $\qquad f(2) = 0$

1 feltétel kell : 3 elég

mert $a_0 + a_1 \cdot 2 + a_2 \cdot 4 + a_3 \cdot 8 = 0$

$\boxed{3}$

Bázis?

$x-2,\ (x-2)^2,\ (x-2)^3$

2 gyöke

≤ 3 fokú

B ???

I. feladatban csupa üres fokú polinomok F

F ✓ G ? [[Iterált Horner]]

$b_0 + b_1(x-2) + b_2(x-2)^2 + b_3(x-2)^3$

$b_0 = 0$ ha gyöke 2.

$x-2,\ (x-2)x,\ (x-2)x^2$

G? $f(2)=0 \Rightarrow f(x)=(x-2)(u+vx+wx^2)$

$\rightarrow$ gyöktényező.

---

3. módszer.

$V = \leq 3.$ fokú!

$\{x-2,\ (x-2)^2,\ (x-2)^3 \mid x,\ 1,\ x+6\}$ 4 dim.

$W =$ azok: $f(2)=0$

$\rightarrow$ F $\Rightarrow \dim W \geq 3$

$\dim W$ lehet-e 4?

W valódi altér! $\dim W < \dim V = 4$

$\Rightarrow$ 3 kész.
