Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

Az 1. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása, 2. rész

1. Altér

Emlékeztető: Ha adott egy V vektortér egy W részhalmaza, akkor a következő lépésekkel ellenőrizhetjük-e, hogy altér-e. Akkor lesz W altér, ha mindhárom kérdésre igenlő a válasz.

(1) Benne van-e a **nullvektor?**
(2) Ha két vektor benne van, akkor benne van-e az összegük is (**zárt-e az összeadásra**)?
(3) Ha egy vektor benne van, akkor benne van-e mindegyik skalárszorosa (**zárt-e a skalárral szorzásra**)?

Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}$ fölötti $\mathbb{R}[x]$ vektortérben a legalább tizedfokú polinomok és a 0 (W_1); a páros fokú polinomok és a 0 (W_2); a legfeljebb tizedfokúak és a 0 (W_3)?

Annak igazolásához, hogy W **nem altér, konkrét példát kell megadni,** ami a fenti három feltétel valamelyikét cáfolja. Például x^{10} és $-x^{10}+x$ mutatja, hogy W_1 és W_2 sem altér, mert ez két páros, és legalább tizedfokú polinom, ezért mindkét halmazban benne vannak, de összegük x, ami tíznél alacsonyabb, páratlan fokú, ezért W_1-ben és W_2-ben sincs benne.

Annak igazolásához, hogy W **altér, bizonyítás szükséges.** Például W_3 altér, és itt az összegre való zártságot a következőképpen ellenőrizhetjük. Legyen $f, g \in W_3$. Ha f, g és $f+g$ egyike sem nulla, akkor $f+g$ foka legfeljebb f és g fokának maximuma lehet, és ezért $f+g \in W_3$. Ha $f=0$, akkor $f+g=g \in W_3$. Ha $g=0$, akkor $f+g=f \in W_3$. Végül ha $f+g=0$, akkor $f+g \in W_3$. (Az esetszétválasztás kell, mert a nullapolinomnak nincs foka.)

További példák (I/14/(2) feladat): legyen $V=\mathbb{R}^{3\times 3}$ az $\mathbb{R}$ fölött. Ekkor (8), (9), (12) altér, a többi nem. Ellenpéldák: (5)-ben szorozzunk $\sqrt{2}$-vel (ez a halmaz $\mathbb{Q}$ fölött altér); (6)-ban keressünk diagonális mátrixokat; (7)-ben ne ugyanott legyen a két egyenlő elem; (11)-ben nincs benne a nulla. A (12) különleges: azért altér, mert a nullmátrix az egyetlen eleme, komplex fölött az analóg módon definiált halmaz nem altér.

Konyhaszabályként leszűrhetjük, hogy *a „homogén lineáris" összefüggéssel definiált halmazok lesznek alterek,* például ha a komponensek összege nulla. (A homogén azt jelenti, hogy a jobb oldalon nulla áll: a (11)-beli példa összefüggése lineáris, de nem homogén.) Ez az intuíció azonban néha tévútra visz, ahogy a (12)-beli halmaz is mutatja.

Mik a sík és a tér alterei $\mathbb{R}$ fölött?

Mielőtt az általános választ megtudnánk, érdemes példát keresni arra, hogy az első és a harmadik síknegyed uniója miért nem altér. Minden vektortérben altér a $\{0\}$ és az egész vektortér. *A sík alterei ezeken kívül csak az origón átmenő egyenesek, a tér alterei pedig csak az origón átmenő egyenesek és síkok.* Ezt később, a dimenzió fogalmának segítségével igazoljuk. Azt azonban érdemes végiggondolni (esetleg a fizika tanulmányokra visszaemlékezve), hogy ha adott a síkon két független v és w vektor, akkor minden síkvektort fel tudunk bontani v és w irányú komponensek összegére, azaz felírhatjuk $\lambda v + \mu w$ alakban.

Ha W altér V-ben, $u \in W$ és $v \notin W$, akkor hol helyezkedhet el $u+v$? És ha $u, v \notin W$?

Az első esetben $u+v \notin W$. Indirekt bizonyítunk: ha $u+v \in W$ lenne, akkor mivel W zárt a kivonásra, $(u+v)-u \in W$ teljesülne, ami ellentmondás. A második esetben $u+v$ lehet W-n belül is kívül is. Mindkét esetre könnyű példát adni, ha pl. V a sík, W pedig az x-tengely.

2. Generálás

Melyik a „leggazdaságosabb” altér $\mathbb{R}[x]$-ben, amely a 1, x, x^2 polinomokat tartalmazza?

„Leggazdaságosabb” alatt azt értjük, hogy olyan kevés polinomot vegyünk be ebbe az altérbe, amilyen keveset csak lehet. Legyen W a keresett altér. Ebben benne van a x^2, és mivel altér, ezért benne van ennek minden skalárszorosa is. Ugyanez igaz x és 1 esetében. De W zárt az összeadásra is, ezért $\alpha + \beta x + \gamma x^2$ mindenképpen benne van. Vagyis benne van az összes legfeljebb másodfokú polinom (ide értve a nullát is). Ezek már alteret alkotnak, ezért több polinomot nem kell bevenni. A kapott W az 1, x, x^2 által **generált altér,** jele $\langle 1, x, x^2\rangle$.

A W altér „leggazdaságosabb” tulajdonsága a következőt jelenti. Sok olyan U altere lehet $\mathbb{R}[x]$-nek, aminek 1, x, x^2 eleme. Ezek között W a **legszűkebb,** azaz W részhalmaza minden ilyen U altérnek. Általában, ha $v_1, \ldots, v_n$ elemei egy V vektortérnek, akkor az általuk **generált** $\langle v_1, \ldots, v_n\rangle$ **altér** a legszűkebb olyan altere V-nek, amelynek $v_1, \ldots, v_n$ eleme. Azaz V minden U alterére igaz, hogy ha $v_1, \ldots, v_n \in U$, akkor $W \subseteq U$. A W altér a $v_1, \ldots, v_n$ vektorok összes $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_n v_n$ lineáris kombinációiból áll, ahol $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ skalárok.

Mi a különbség egy halmazrendszer legszűkebb, illetve minimális eleme között?

Legyen $\mathcal{H}$ az egész számok halmazának összes véges, legalább tízelemű részhalmaza. Ebben a halmazrendszerben minden tízelemű halmaz **minimális elem,** mert bármelyiket is vesszük, annak egyetlen valódi részhalmaza sincs benne a $\mathcal{H}$ halmazrendszerben. De **legszűkebb eleme** nincs $\mathcal{H}$-nak, mert nincs olyan legalább tízelemű véges részhalmaz, amely része lenne az összes legalább tízelemű véges részhalmaznak. Ha viszont az egész számok halmazának az összes véges részhalmazát vesszük, ezek között van legszűkebb: az üres halmaz.

Igaz-e, hogy $x \in \langle 1+x, 1+x^2, x^2\rangle$, illetve hogy $x \in \langle 1-x, 1-x^2, x^2-3x+2\rangle$?

Az első kérdés az, hogy $x = \alpha_1(1+x) + \alpha_2(1+x^2) + \alpha_3 x^2$ teljesül-e alkalmas $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ skalárokra. A megfelelő együtthatókat felírva a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} x^2 &: 0 = \alpha_2 + \alpha_3 \\ x &: 1 = \alpha_1 \\ 1 &: 0 = \alpha_1 + \alpha_2 \,. \end{aligned}$$

Ez a lineáris egyenletrendszer akkor oldható meg, vagyis **akkor van benne a vektor a generált altérben, ha a Gauss-elimináció során nem keletkezik tilos sor.** Itt nyilván $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$ megoldás. A második kérdésre a válasz nemleges, keletkezni fog tilos sor. Ezt számolás nélkül is láthatjuk, mert az $1-x$, $1-x^2$, x^2-3x+2 polinomok mindegyikének gyöke az 1, ezért minden lineáris kombinációjuknak is, az x-nek viszont nem.

Igaz-e, hogy $\langle x, x^2+2, x+2\rangle \subseteq \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$, illetve hogy e két altér egyenlő.

Azt kellene megvizsgálni, hogy tetszőleges $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ esetén $\alpha_1 x + \alpha_2(x^2+2) + \alpha_3(x+2)$ benne van-e az $U = \langle 1, x+1, x^2+1\rangle$ altérben. Ha felírnánk a megfelelő lineáris egyenletrendszert, akkor abban $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ paraméterként szerepelne a jobb oldalon. A Gauss-elimináció ilyenkor is működik, tehát meg tudnánk oldani a feladatot. Azonban van egy gyorsabb eljárás is.

Elsőként azt ellenőrizzük, hogy x, x^2+2, $x+2$ benne van-e az U altérben. Ha valamelyik nincs, akkor a kérdéses tartalmazás nem teljesül. Ha azonban mindhárom polinom benne van U-ban, akkor a lineáris kombinációik is, hiszen U altér, és így a tartalmazás teljesül.

Mindez következik a $W = \langle x, x^2+2, x+2\rangle$ altér „legszűkebb” tulajdonságából is, hiszen U olyan altér, amely az x, x^2+2, $x+2$ polinomokat tartalmazza.

Az $U = W$ egyenlőség eldöntéséhez az $U \subseteq W$ tartalmazást is meg kell vizsgálni. Ez három további, összesen hat lineáris egyenletrendszer megoldását követeli meg.

Közvetlenül is ellenőrizhetjük, hogy $U = W$, a következőképpen. A W altérben benne van $x+2$ és x, tehát a különbségük, azaz 2 is, és ennek 1/2-szerese, azaz 1 is. Mivel 2 és x^2+2 is W-ben van, ezért $x^2+2-2 = x^2$ is. De akkor $1, x, x^2 \in W$, ezért W éppen a legfeljebb másodfokú polinomok altere. Hasonló érvelés mondható U esetében is. (Ez a fajta gondolatmenet csak szerencsés, egyszerű esetekben működik, általában Gauss-eliminációval érdemes számolni.)

3. Nehezebb feladatok

1. Mely lineáris egyenletrendszerekre igaz, hogy a megoldásaik alteret alkotnak?

A homogénekre, mert a nullvektornak benne kell lennie.

2. Legyen W altere az $\mathbb{R}$ fölötti V vektortérnek, és $u, v \in V$. Ha $2u+6v \in W$ és $3u+v \in W$, akkor igaz-e mindig, hogy $u, v \in W$? És ha $2u+6v \in W$ és $3u+9v \in W$?

Az első esetben $3(2u+6v)-2(3u+v) = 16v \in W$, tehát $v \in W$ és így $3u = (3u+v)-v \in W$, azaz $u \in W$. A második kérdésre nemleges a válasz, ha W a nulla altér a síkon, akkor legyen $u = (-3, 0)$ és $v = (1, 0)$.

3. Ha egy V vektortér vektoraira $a \notin \langle b, c\rangle$, $b \notin \langle a, c\rangle$ és $c \in \langle a, b\rangle$, akkor mi a c?

Kezdjük azzal a feltétellel, amit képlettel fel tudunk írni: $c = \alpha a + \beta b$. Ha $\alpha \neq 0$, akkor ebből a kifejezhető b és c lineáris kombinációjaként, ami ellentmond annak, hogy $a \notin \langle b, c\rangle$. Ez az ellentmondás mutatja, hogy $\alpha = 0$. Hasonló gondolatmenettel $\beta = 0$, és akkor $c = 0$. Példát kell még adni arra, hogy $c = 0$ tényleg lehetséges.

4. ***(*)*** Legyen V vektortér a T test fölött. Mikor lesz két altér uniója is altér?

Akkor és csak akkor, ha a két altér közül az egyik tartalmazza a másikat. Ha ez a helyzet, akkor a két altér uniója a két altér egyike, tehát altér. Megfordítva, legyenek U és W olyan alterek, hogy egyik sem tartalmazza a másikat. Ekkor van olyan $u \in U$, ami nincs W-ben, és olyan $w \in W$, ami nincs U-ban. Belátjuk, hogy $u + w \notin U \cup W$. Valóban, ha $u + w$ benne lenne U-ban, akkor mivel $u \in U$, e két vektor különbsége, azaz w is U-ban lenne, amit kizártunk. Hasonlóan $u + w$ nincs benne W-ben sem.

5. Mi az üres halmazt tartalmazó legszűkebb altér? Mutassuk meg, hogy egy 1 elemmel generált altérnek legfeljebb két altere lehet.

Az üres halmaz által generált altér a $\{0\}$ (ez a vektortér legszűkebb altere; az üres összeget egyébként nullának érdemes definiálni). Ha $W \neq \{0\}$ altere egy $\langle u\rangle$ vektortérnek, akkor van $0 \neq w \in W$. Ez λu alakban írható. Ekkor $\lambda \neq 0$, tehát $u = (1/\lambda)w \in W$, és így $W = \langle u\rangle$.

6. ***(*)*** Mikor lesz egy $\mathbb{R}$ feletti vektortérnek véges sok altere? Mi a helyzet más testek fölött?

Egy végtelen T test fölötti vektortérnek pontosan akkor van véges sok altere, ha egy elemmel generálható. Az előző feladatban láttuk, hogy az egy elemmel generálható vektorterekre ez a helyzet. Ha viszont V nem generálható egy elemmel, akkor van benne két független, v_1 és v_2 vektor. Ekkor a $\langle v_1 + \lambda v_2\rangle$ alterek páronként különbözők, ha λ befutja a T elemeit. Véges test fölött minden végesen generált vektortér véges, és ezért véges sok altere van.