Bsc Lineáris és absztrakt algebra gyakorlat

Az 1. prezentációhoz tartozó feladatsor megoldása, 1. rész

1. Lineáris függetlenség

Emlékeztető: a tér pontjait olyan helyvektoroknak képzeljük, amelyek az origóból az adott pontba mutatnak. Meg lehet mutatni, hogy ha v_1, v_2, v_3 ilyen vektorok, akkor a végpontjaik akkor és csak akkor vannak egy origón átmenő síkban (másképp fogalmazva: ezek a vektorok akkor és csak akkor vannak egy síkban), ha léteznek olyan α_1, α_2, α_3 valós számok, amelyek nem mindhárman egyenlők nullával, de $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Ismételjük át ezzel kapcsolatban a **lineáris függetlenség** fogalmát az előadásjegyzetből.

Lineárisan függetlenek-e (külön-külön) az alábbi mátrixok oszlop-, illetve sorvektorai?

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&0&6\\2&0&5\\3&0&0\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&2&1\\1&1&1\\3&2&3\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix}\quad \begin{pmatrix}2&4&6\\2&4&6\\3&6&9\end{pmatrix}$$

A függetlenség megállapításához felírunk ismeretlen, általános együtthatókkal egy lineáris kombinációt, és nullával tesszük egyenlővé. Ez egy lineáris egyenletrendszerre vezet. Az első mátrix oszlopai esetében ez a következő:

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_3\\\alpha_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

(ismételjük át, hogyan adunk össze, és hogyan szorzunk skalárral oszlopvektorokat: *komponensenként*). Nyilván $\alpha_1 = \alpha_3 = \alpha_2 = 0$, így az első mátrix oszlopai lineárisan függetlenek.

A második mátrix esetében a kapott lineáris egyenletrendszer mátrixa, illetve a **Gauss-elimináció** végeredménye a következő:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&2&3&0\\4&5&6&0\\7&8&9&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c}1&0&-1&0\\0&1&2&0\\0&0&0&0\end{array}\right)$$

(vegyük észre, hogy a bal oldalon maga a mátrix szerepel). Vagyis α_3 szabad változó, hiszen az oszlopában nincs karika, a másik kettő kötött, és ezek kifejezhetők a szabad változóval: $\alpha_1 = \alpha_3$ és $\alpha_2 = -2\alpha_3$. Az α_3 tetszőlegesen megválasztható, ha pl. az értéke 1, akkor $\alpha_2 = -2$ és $\alpha_1 = 1$. Ez egy olyan megoldás, ahol nem mindegyik együttható nulla, és ezért a második mátrix oszlopai lineárisan összefüggenek.

Melyik pontja az a fenti számításnak, amikor már megállapíthattuk volna, hogy az oszlopok összefüggők? Ha nincs szabad változó, akkor az egyenletrendszernek egyértelmű a megoldása, és ez csak az azonosan nulla lehet, ezért ilyenkor a vektorok függetlenek. Ha viszont van szabad változó, akkor annak adhatunk nem nulla értéket is, ezért a vektorok összefüggők. Ezért **a vektorok pontosan akkor függetlenek, ha minden oszlopban van karika.**

Még hamarabb is észrevehettük volna, hogy a második mátrix három oszlopvektora összefüggő. A sorok ugyanis számtani sorozatok, és ezért a középső oszlop a két szélső oszlop átlaga, azaz $v_1 - 2v_2 + v_3 = 0$. (Ha egy feladat megoldására látunk algoritmust, akkor is *a számolás megkezdése előtt mindig érdemes kis időt azzal eltölteni, hogy meggondoljuk, nincs-e ügyesebb, rövidebb, esetleg számolásmentes megoldás.*)

A harmadik mátrix esetében a két szélső oszlopot vehetjük nulla együtthatóval, a középsőt 1 együtthatóval, ezért ezek összefüggenek. *Tanulság:* ha egy rendszerben szerepel a nullvektor, akkor az összefüggő.

A negyedik mátrix esetében a középső oszlopot vehetjük nulla együtthatóval, a két szélsőt pedig 1, illetve -1 együtthatóval, ezért ez a rendszer is összefüggő. *Tanulság:* ha a rendszerben van két egyenlő vektor, akkor a rendszer összefüggő. Sőt, akkor is, ha a rendszer egyik vektora egy másik vektor skalárszorosa.

Általában is, ha a rendszerben néhány vektorról látjuk, hogy összefüggő, akkor az egész rendszer az, hiszen a többi vektort nulla együtthatóval vehetjük.

A hatodik mátrixban bármely két oszlop egymás skalárszorosa, ezért itt az oszlopok összefüggenek. Az ötödik mátrix oszlopai függetlenek. Ez is látható számolásmentesen: bebizonyítjuk majd, hogy **egy négyzetes mátrix oszlopai akkor és csak akkor összefüggők, ha a determinánsa nulla.** Az ötödik mátrix felső háromszögmátrix, a determinánsa 1.

Nemcsak oszlopvektorokat tudunk összeadni és számmal szorozni, hanem például polinomokat is. Ezért a lineáris függetlenség fogalma polinomokra is értelmezhető.

Lineárisan függetlenek-e (külön-külön) az alábbi polinomrendszerek?
$\{1, x, x^2\}$, $\{1+x, 1+x^2, x+x^2\}$, $\{x, 2x, x^2, x^3\}$, $\{1+x, 1+2x, 1+3x\}$.

Mit jelent az, hogy $\alpha_1 \cdot 1 + \alpha_2 \cdot x + \alpha_3 \cdot x^2 = 0$? Ez két polinom egyenlősége, aminek az a feltétele, hogy a megfelelő együtthatók megegyezzenek. Ezért $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$, tehát az első polinomrendszer független.

A második polinomrendszernél az a kérdés, hogy az $\alpha_1(1+x)+\alpha_2(1+x^2)+\alpha_3(x+x^2) = 0$ összefüggés milyen α_1, α_2, α_3 esetén teljesül. Úgy kapunk lineáris egyenletrendszert, hogy rendre felírjuk az x^2, x, 1 együtthatóját, azaz x hatványai szerint rendezzük a polinomot. Az eredmény: $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3 = \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Ennek az egyenletrendszernek is csak a triviális, csupa nulla megoldása van, ezért a második polinomrendszer is független.

A harmadik rendszer összefüggő, hiszen x és $2x$ egymás skalárszorosa. A negyedik rendszer is összefüggő, hiszen ez a három polinom számtani sorozatot alkot.

Lineárisan független-e $\mathbb{R}$ *fölött* $1+i$, $2+i$, $4+i$?

A **fölött** szó azt árulja el, honnan vesszük az együtthatókat. Ezért azt kell megvizsgálni, hogy mely α_1, α_2, α_3 valós számokra teljesül, hogy $\alpha_1(1+i)+\alpha_2(2+i)+\alpha_3(4+i) = 0$. Két komplex szám akkor egyenlő, ha a valós és képzetes részük is egyenlő. Ezért két egyenletet kapunk: a valós részből $\alpha_1 + 2\alpha_2 + 4\alpha_3 = 0$, a képzetes részből pedig $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0$. Ha az eliminációt elvégeznénk, akkor biztosan lenne olyan oszlop. ahol nincs karika, hiszen két sor van csak, és így legfeljebb két karika szerepelhet. Ezért általában is azt kapjuk, hogy **bármely három komplex szám összefügg $\mathbb{R}$ fölött.**

Igazoljuk, hogy ha $\{v_1, v_2, v_3\}$ *független, akkor* $\{v_1 - 3v_2, v_2, v_3\}$ *is független.*

Ebben a feladatban az az újdonság, hogy immáron „általános” „vektorokról” van szó, amikről semmit nem tudunk, lehetnek polinomok, térvektorok, stb. Most is egy lineáris kombinációt írunk fel, és nullává tesszük: $\alpha_1(v_1 - 3v_2) + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Ha itt elakadunk, akkor kérdezzük meg magunktól, hogyan használhatnánk ki azt a feltételt, hogy $\{v_1, v_2, v_3\}$ független? Ehhez v_1, v_2, v_3 egy lineáris kombinációjáról kellene tudnunk, hogy nullával egyenlő. Az előző egyenletet a v_j-k szerint rendezve ilyet kapunk: $\alpha_1 v_1 + (\alpha_1 - 3\alpha_2)v_2 + \alpha_3 v_3 = 0$. Itt tehát minden együttható nulla, ahonnan $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ adódik.

Hasonlóan igazolhatjuk általában is, hogy egy rendszer független mivolta nem változik meg akkor, ha az egyik vektorból kivonjuk egy másik vektor számszorosát. Ez hasonló ahhoz, hogy a determináns sem változik meg, ha egyik sorából kivonjuk egy másik sor számszorosát, és egy egyenletrendszer megoldásainak a halmaza sem változik meg, ha az egyik egyenletből kivonjuk egy másik egyenlet számszorosát.

Mikor lesz független két vektor?

A választ óvatosan kell megfogalmazni, mert az nem igaz, hogy pontosan akkor, ha egymás skalárszorosai. Ha ugyanis $v \neq 0$, akkor $\{0, v\}$ összefüggő, és a 0 tényleg skalárszorosa (nullaszorosa) v-nek, de v nem skalárszorosa a nullvektornak. A helyes válasz: akkor összefüggőek, ha *valamelyik* a másiknak skalárszorosa.Valóban, ha $\alpha v + \beta w = 0$, de például $\alpha \neq 0$, akkor $v = (\beta/\alpha)w$. Érdemes végiggondolni, hogy ha egyik vektor sem nulla, akkor viszont már pontosan akkor összefüggőek, ha mindegyik a másiknak skalárszorosa. Oszlopvektorok esetében ez ránézésre látszik abból, hogy a bennük lévő számok egyenesen arányosak-e. Három vektornál már semmi ilyen könnyítés nincs.

2. Nehezebb feladatok

1. Igazoljuk, hogy páronként különböző fokú polinomok rendszere mindig független.

Ha egy lineáris kombináció nulla, akkor vegyük a legmagasabb fokú polinom főtagját. Ilyen fokú tag az egész összegben csak egy van, és ezért a legmagasabb fokú polinom együtthatója a lineáris kombinációban nulla. Folytassuk az eljárást a második legmagasabb fokú polinommal.

2. Legyenek $a, b, c \in \mathbb{R}$ páronként különbözők. Igazoljuk, hogy $(x-a)(x-b)$, $(x-b)(x-c)$, $(x-a)(x-c)$ lineárisan függetlenek.

Tegyünk nullával egyenlővé egy általános lineáris kombinációt, és a kapott összefüggésben helyettesítsünk x helyére rendre a-t, b-t, c-t.

3. Független-e $\mathbb{Q}$ fölött $\{\lg 2, \lg 3, \lg 6\}$, illetve $\{\lg 2, \lg 3, \lg 5\}$? Általánosítsunk!

Nyilván $\lg 2 + \lg 3 - \lg 6 = 0$. Ha viszont $r_2 \lg 2 + r_3 \lg 3 + r_5 \lg 5 = 0$, ahol $r_i = p_i/q_i$, akkor átrendezéssel $2^{p_2 q_3 q_5} 3^{p_3 q_2 q_5} 5^{p_5 q_2 q_3} = 1$. A számelmélet alaptételének egyértelműségi állítása miatt itt mindegyik kitevő nulla. Általában a prímek logaritmusai függetlenek $\mathbb{Q}$ fölött.

4. *(*)* Előáll-e a $\sqrt{3}$ az 1 és $\sqrt{2}$ számok racionális együtthatós lineáris kombinációjaként? Lineárisan függetlenek-e 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ és $\sqrt{6}$ a racionális számok teste fölött? Általánosítsunk!

Ha $\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}$, akkor emeljük négyzetre, és próbáljuk meg $\sqrt{2}$-t kifejezni az egyenletből. Ha $a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$, akkor ezt írjuk $a + b\sqrt{2} + \sqrt{3}(c + d\sqrt{2})$ alakba, osszunk $c + d\sqrt{2}$-vel és gyöktelenítsük a nevezőt.

5. *(*)* Tegyük fel, hogy egy vektortér a, b, c, d vektoraira $\{a, b, d\}$, $\{a, c, d\}$, $\{b, c, d\}$ mindegyike összefüggő, de $\{a, b, c\}$ független. Határozzuk meg d-t.

Mutassuk meg, hogy d kifejezhető a, b, c közül bármely kettő lineáris kombinációjaként. Ezeket egyenlővé téve használjuk fel, hogy $\{a, b, c\}$ független. Az eredmény $d = 0$.

6. Van-e három olyan vektor $\mathbb{R}^2$-ben, melyek három darab kételemű részhalmaza közül rendre 1, 2, 3 független? És ha a vektorok egyike sem nulla?

Ha csak 1 kételemű független, akkor a kimaradó vektor nulla kell, hogy legyen.