$\lg 2,\ \lg 3,\ \lg 6 \quad \boxed{F}\,?$

$6 = 2 \cdot 3 \Rightarrow \lg 2 + \lg 3 - \lg 6 = 0.$

$\boxed{ÖF}$

$\lg 2,\ \lg 3,\ \lg 5 \quad \boxed{F}$

(ℝ fölött ∀2 valós szám öf).

$\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R} = 1.$

ℚ fölött

$$p_2/q_2 \lg 2 + p_3/q_3 \lg 3 + p_5/q_5 \lg 5 = 0 \ /\ 10^{\wedge}$$

$$2^{p_2/q_2} \cdot 3^{p_3/q_3} \cdot 5^{p_5/q_5} = 1 \quad /\ {}^{\wedge}\, q_2 q_3 q_5$$

$$2^{p_2 q_3 q_5} \cdot 3^{p_3 q_2 q_5} \cdot 5^{p_5 q_2 q_3} = 1 \Rightarrow\ ?$$

SZAT. kitevő lehet negatív is!

$\left(2^{q_2 q_3 q_5} \cdot 3^{p_3 q_2 q_5} = 5^{-p_5 q_2 q_3}\right.$

(negatív kitevők átrendezése, pl.

→ ∀ kitevő 0 $(q_2, q_3, q_5 \neq 0) = p_2 = p_3 = p_5 = 0$

$1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{5}$ $\quad \boxed{F}$-e $\mathbb{Q}$

$\sqrt{3} \overset{?}{\in} \langle 1, \sqrt{2} \rangle$

$\underbrace{\sqrt{3} = a + b\sqrt{2}}$ $\leftarrow$ $a, b \in \mathbb{Q}$

$3 = a^2 + 2ab\sqrt{2} + b^2 \cdot 2$

$\underbrace{3 - 2b^2 - a^2}_{\text{rac.}} = 2ab\sqrt{2}$ $\quad \sqrt{2}$ irrac $\Rightarrow ab = 0$

$a = 0 \Rightarrow \sqrt{3} = b\sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{\frac{3}{2}}$ rac ↯.

$b = 0 \Rightarrow \sqrt{3} = a$ ↯ $\quad \sqrt{3}$ is irrac

[illegible]

$\sqrt{p/q}$ $(p,q) = 1$
rac
$\Rightarrow p, q$
négyzetszám.

$a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6} = 0$

$a + c\sqrt{3} + \sqrt{2}(b + d\sqrt{3}) = 0$

$$\sqrt{2} = \frac{-(a + c\sqrt{3})}{b + d\sqrt{3}} = \frac{-(b - d\sqrt{3})(a + c\sqrt{3})}{\underbrace{(b + d\sqrt{3})(b - d\sqrt{3})}_{b^2 - 3d^2}} = x + y\sqrt{3}$$

$x, y \in \mathbb{Q}$

HF

$\Rightarrow x = y = 0$ HF.

$$\lambda_1 (x-a)(x-b) + \lambda_2 (x-b)(x-c) + \lambda_3 (x-a)(x-c) = 0$$

$1 : ? = 0$

$x : ?? = 0$ $\rightsquigarrow$ működik ???

$x^2 : ??? = 0$ van jobb.

$x = a \Rightarrow \lambda_2 (a-b)(a-c) = 0 \Rightarrow \lambda_3 = 0$

$a \neq b \quad a \neq c$

stb. HF.

$\{a, b, d\}$ $\{a, c, d\}$ $\{b, c, d\}$ ÖF

$\{a, b, c\}$ $\boxed{F}$.

$\hookrightarrow$ $d = \alpha_1 a + \beta_1 b$

$d = \alpha_2 a + \gamma_2 c$

$v_1, \ldots, v_n$ $\boxed{F}$

$v_1, \ldots, v_n, v$ $\boxed{\text{ÖF}}$

$\Rightarrow v$ függ $v_1, \ldots, v_n$-től.

$(\alpha_1 - \alpha_2) a + \beta_1 b - \gamma_2 c = 0$ $\{a, b, c\}$ $\boxed{F}$

$\Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2, \ \beta_1 = 0, \ \gamma_2 = 0.$ $\boxed{d = 0}$

vagy II. mo. $d = \alpha_1 a$

HF $d = \beta_3 d + \gamma_3 c$ és ugyanígy. $\boxed{d = 0}$.

v_1, v_2, v_3, v_4 $\boxed{F}$

$v_1+v_2,\ v_2+v_3,\ v_3+v_4,\ v_4+v_1$ $\boxed{F}$ -e ?

$$\underbrace{(v_1+v_2)+(v_3+v_4)}_{+} = \underbrace{(v_2+v_3)+(v_4+v_1)}_{+}$$

nem $\boxed{F}$.

---

v_1, v_2, v_3

$v_1+v_2,\ v_2+v_3,\ v_3+v_1$

$$\lambda_3(v_1+v_2)+\lambda_1(v_2+v_3)+\lambda_2(v_1+v_3)=0$$

v_1, v_2, v_3 szerint, hiszen azok $\boxed{F}$

v_1 : $\lambda_2+\lambda_3=0$

v_2 : $\lambda_1+\lambda_3=0$ $\Rightarrow$ $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

v_3 : $\lambda_1+\lambda_2=0$

$\mathbb{Z}_2 = \mathbb{F}_2$!!!

A test bármi lehet?

$$\lambda_2 = -\lambda_3 = \lambda_1 = -\lambda_2 \Rightarrow \lambda_2 = 0.$$

$(v_1+v_2)+(v_2+v_3)+(v_3+v_1)=0$ $\quad$ $1+1=0$.

$W \subseteq V$ altér, ha

(0) $0 \in W$.

(1) zárt a $+$-ra $\quad w_1, w_2 \in W \overset{?}{\Rightarrow} w_1 + w_2 \in W$.

(3) zárt λ-szorzásra $(\forall\lambda)$ $\quad w \in W \overset{?}{\Rightarrow} \lambda w$.

---

(1) W ≤ 10. fokú (és 0)

$0 \in W$ ✓

$f, g \in W \overset{?}{\Rightarrow} f+g \in W$

$\operatorname{gr} f \leq 10$, $\operatorname{gr} g \leq 10$ $\Rightarrow$ $\operatorname{gr}(f+g)$ foka $\leq \max\{\operatorname{gr} f, \operatorname{gr} g\} \overset{?}{\leq} 10$

vagy $f = 0$ vagy $g = 0$

Alg 1: igen.

---

(2) ≥ 10. fokú és 0.

NEM: KONKRÉT (ELLEN)PÉLDA kell.

$x^{10} + 1$ és $-x^{10}$ ellenpélda.

(3) NEM $x^{10}+x$ és $-x^{10}$ összege x

$\nearrow$ plan fokú.

---

(4) IGEN.

---

(5) (IGEN $\mathbb{Q}$ fölött, de) NEM $\mathbb{R}$ fölött

$\sqrt{2}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ kivezet. 2×2-esre definiál ugy.

(6) det $=0$ NEM

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

$\det=0$ $\det=0$ $\det=1$

(7) NEM

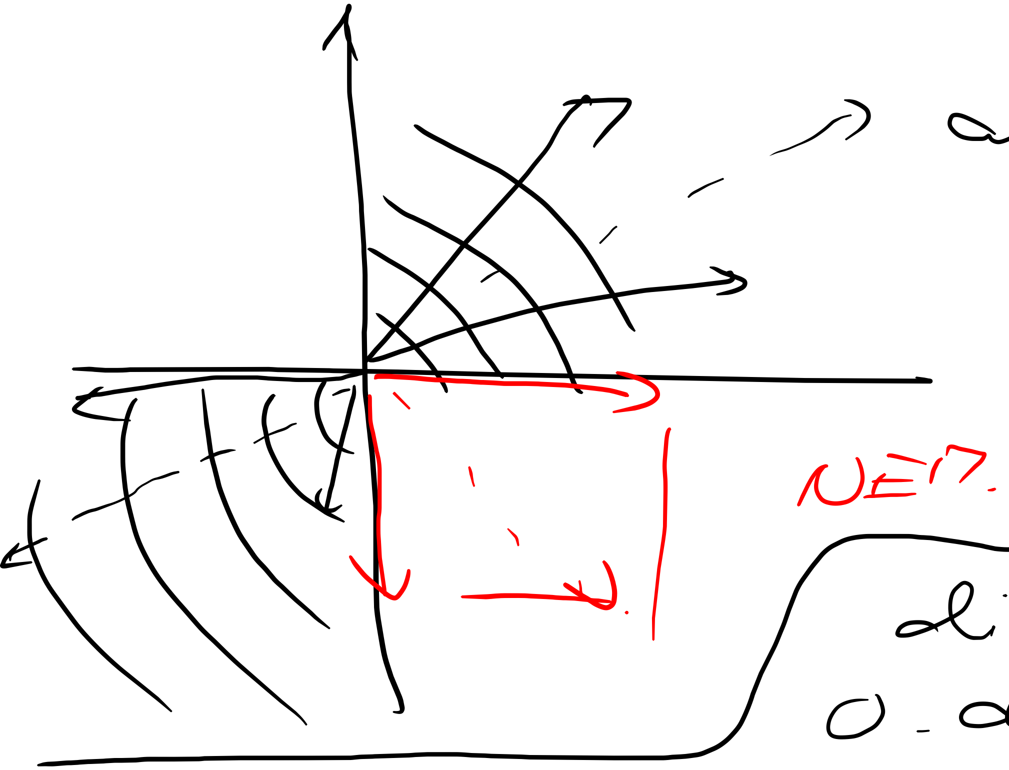
$$\underset{\in W}{\begin{pmatrix}1&1\\2&3\end{pmatrix}}+\underset{\in W}{\begin{pmatrix}1&2\\3&3\end{pmatrix}}=\underset{\notin W.}{\begin{pmatrix}2&3\\5&6\end{pmatrix}}$$

(8) IGEN.

HF a többi:

(9)-(12)

és (13) part.



Mik a sík alterei?

dim szerint:

dim(sík) = 2

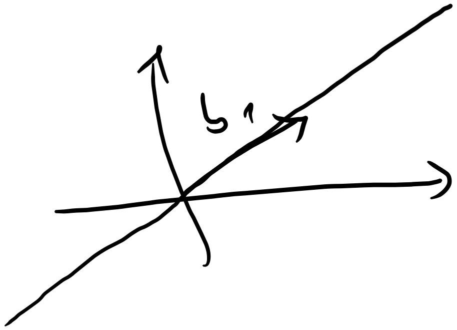
0-dim: {0}.

1-dim: 0 origón át egyenesek.

W 2-dim: W = az egész sík.

(valódi altér dim < dim(sík))

1-dim $\{\overset{\overset{0}{\neq}}{b_1}\}$ bázis $\{\lambda b_1 \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$



Tehát 0-n át sík is egyenesek is {0} egész.

15. HF.

$$x \overset{?}{\in} \langle x^2-1,\ x^2-2,\ 3x+2 \rangle = W$$

$$x = \lambda_1(x^2-1) + \lambda_2(x^2-2) + \lambda_3(3x+2)$$

lehet-e?

x szerint rendezve lin. egy. rsz.

$1: \quad 0 = -\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3$

$x: \quad 1 = 3\lambda_3$

$x^2: \quad 0 = \lambda_1 + \lambda_2$

$$\begin{array}{c} \\ 1 \\ x \\ x^2 \\ \\ \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} \boxed{\begin{matrix}-1\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}-2\\0\\1\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}2\\3\\0\end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix}0\\1\\0\end{matrix}} \\ x^2-1 & x^2-2 & 3x+2 & x \end{array}\right]$$

e.l.

van-e m.o.

∃ TILOS sor : nincs lépés különben igaz.

II. m.o.

$\left.\begin{matrix} x^2-1 \\ x^2-2 \\ 3x+2 \end{matrix}\right\} \in W$

HF

$\longrightarrow (x^2-1)-(x^2-2) = 1 \in W$

$\left.\begin{matrix} 1 \\ x^2-1 \end{matrix}\right\} \in W \longrightarrow x^2 \in W$

$\left.\begin{matrix} 3x+2 \\ 1 \end{matrix}\right\} \rightarrow 3x = (3x+2) - 2\cdot 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3}(3x) \in W$ ✓

$x \overset{?}{\in} \langle x^2-1, x^3-1, x-1 \rangle$ ← elég az 1!

NINCS mert $x = \lambda_1(x^2-1) + \lambda_2(x^3-1) + \lambda_3(x-1)$

$x = 1$ $\qquad \downarrow$ 0

1-et behelyettesítünk.

16.

$\langle x, x+2, x^2+2 \rangle \overset{?}{=} \langle 1, x+1, x^2+1 \rangle$

$x, x+2, x^2+2 \underset{?}{\in}$

Ha igen $\subseteq$.

Utána

$\underset{?}{\ni} 1, x+1, x^2+2$

Ha igen $\supseteq$.

Ha mindkettő $\Rightarrow$ egyenlőek.

HF: kiszámolni. Miért? (legegyszerűbb alatt).